逆立ちゴマの運動のシミュレーション

2013SE051 井上巧一

指導教員：杉浦洋

1 はじめに

逆立ちゴマは普通のコマの動きとは異なり，回すと横倒しになって回り続け，やがてコマが逆さとなってコマの軸が下端となり回転を続ける．また，逆さとなった後も回転方向は変わらない．私はこのような興味深い特性に興味をもち，その様子についてコンピュータのシミュレーションで詳しく調べる．

コマの運動を支配しているのは剛体力学である．それにより逆立ちゴマの状態を表す微分方程式を導出する．得られた微分方程式を Mathematica 上で古典的 4 次ルンゲ・クッタ法により解き，コマの動きを調べる．

2 逆立ちゴマの運動方程式

真球の逆立ちゴマを考える．球の半径を R とする，その質量を m とする．重心と中心との距離を a，コマの重心の位置を $\boldsymbol{r}$，重心を中心とする主軸慣性モーメント I_x, I_y, I_z は，直立したコマの x, y, z 軸方向の慣性モーメントである．コマは対称ゴマとし，$I_x = I_y = I_{xy}$ とする．コマは床の上を動摩擦係数 μ_1 で滑るものとする．重力加速度を $g = 9.8[m/s^2]$ とする．以下のように記号を設定する．

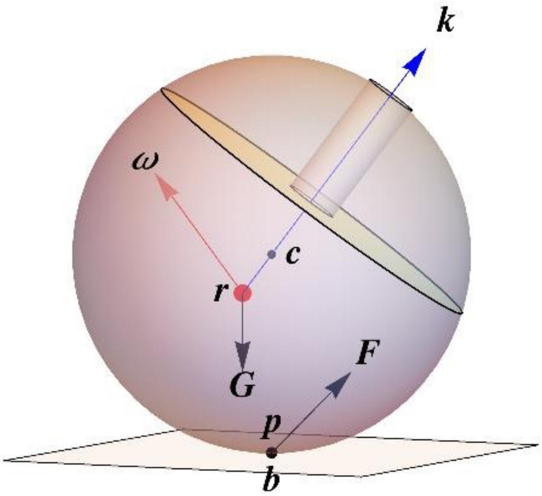

図 1 コマのモデル図

床のコマの接点： $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, 0)$, $\boldsymbol{b}_{xy} = (b_x, b_y)$,
コマの床との接点：$\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z) = \boldsymbol{b}$,
$\boldsymbol{p}_{xy} = (p_x, p_y)$,
コマの軸ベクトル： $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$,
重心周りの角速度： $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$,
重力ベクトル： $\boldsymbol{G} = (0, 0, -mg)$,
床の抗力： $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$,
重心周りの慣性テンソル： $I(\boldsymbol{k})$.

コマの重心位置 $\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} + (0, 0, R) - a\boldsymbol{k}. \tag{1}$$

重心の並進運動方程式は,

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = m(\ddot{\boldsymbol{b}} - a\ddot{\boldsymbol{k}}) = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}. \tag{2}$$

接地点 $\boldsymbol{b}$ のコマ側を $\boldsymbol{p}$ とすると，$\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{r}$ と共に並進運動し，$\boldsymbol{r}$ の周りを角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転するので，

$$\dot{\boldsymbol{p}} = (\dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_z) = \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}). \tag{3}$$

式 (2) の z 成分を比較して $-ma\ddot{k}_z = -mg + F_z$ より，

$$F_z = mg - ma\ddot{k}_z. \tag{4}$$

$\boldsymbol{p}_{xy} = (p_x, p_y)$ とすると，動摩擦の公式より，摩擦による抗力の xy 成分は

$$(F_x, F_y) = -\mu_1 F_z \frac{\dot{\boldsymbol{p}}_{xy}}{\|\dot{\boldsymbol{p}}_{xy}\|}. \tag{5}$$

また，角運動量の方程式より，

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \dot{I}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{\omega} + I(\boldsymbol{k})\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{F}.$$

である．式 (2), (3), (4), (5) がコマの運動の方程式である．

これらの方程式から，抗力 $\boldsymbol{F}$ を消去して，微分方程式の標準形

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} = (b_x, b_y, v_x, v_y, k_x, k_y, k_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z) \tag{6}$$

を導く．

3 逆立ちゴマのモデル化

図 2 市販の逆立ちゴマ

市販の逆立ちゴマ (図 2) を図 3 のようにモデル化し，比重を 0.9 に設定した．コマは柄を含めて完全な球体とする．ただし，設計図で，球体の高さ 20mm より上の部分は質量をもたないものとする．これで実際の逆立ちゴマの回転体の物理特性 (重心位置，慣性モーメント) を近似する．

モデルゴマの質量は $m = 9.4g$，重心は球の中心より 5mm 下にある．

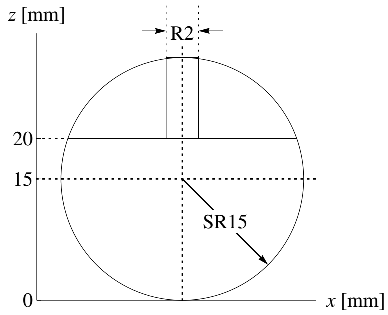

図 3　逆立ちゴマの設計図.1

対称ゴマなので，主軸慣性モーメント I_x, I_y, I_z のうち，$I_x = I_y = I_{xy}$ である．計算により，直立時の慣性行列は

$$I = \begin{pmatrix} I_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}, I_{xy} = 6.79\times 10^{-7}, I_z = 9.05\times 10^{-7}$$

となった．

4　数値実験

4 章で述べたアルゴリズムにより，方程式式 (6) の関数 f を Mathematica で書き，古典的 4 次ルンゲ・クッタ法で解いた．
動摩擦係数 $\mu_1 = 0.1$ として観察する．初期値 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(0)$ を

$$\boldsymbol{b}_{xy} = (0,0),\ \boldsymbol{v}_{xy} = (0,0),$$
$$\boldsymbol{k} = (0, \sin\theta,\ \cos\theta),\ \theta = 5^\circ,\ \boldsymbol{\omega} = 100 \times 2\pi \boldsymbol{k}$$

で設定し，時間ステップ $dt = \frac{1}{800}$ で $t \in [0,5]$ において方程式を解いた．力学的エネルギーの変化を図 4.1 に示す．摩擦があるので，力学的エネルギーは単調に減少する．エネルギーは 1.5 秒から 2.3 秒まで急速に減少しそれ以後はほぼ安定する．

次にコマの軸方向単位ベクトル $\boldsymbol{k}$ の z 成分 k_z の変化を示す (図 4.2)．k_z は，1.0 秒から 2.3 秒の間で急減少し-1 で安定する．これは軸方向単位ベクトル k が真下を向いて安定したことを意味しコマが倒立したことを示す．

その間の角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の変化を図 4.3,4.4,4.5,4.6 に示す．ω_x,ω_y の絶対値は急激に増大し，1.5 秒あたりから減衰していく．ω_z は 1.5 秒後から減少し，2.3 秒後から安定を保つ．3 つの成分を同時に表したのが図 4.6 である．ω_x,ω_y の一時的な増減があるが，一貫して ω_z はプラスで値をとっている．このことは，コマの回転が常にほぼ垂直な回転軸を持ち，回転方向も常に上から見て左回りであることを示す．また，2.5 秒以降は初期状態より低い速度で安定しており，逆立ちの過程で回転エネルギーが失われたことを示す．

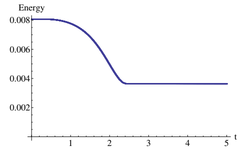

図 4.1 エネルギー

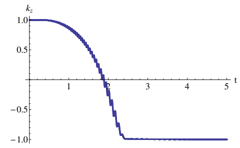

図 4.2 k_z

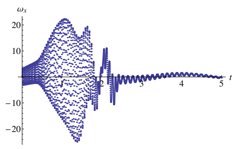

図 4.3 ω_x

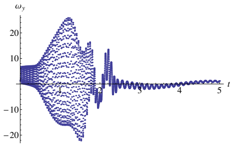

図 4.4 ω_y

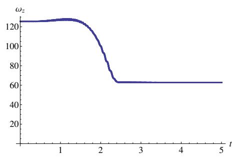

図 4.5 ω_x

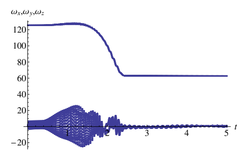

図 4.6 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$

5　おわりに

本研究では，球形の逆立ちゴマの運動を研究した．剛体力学に基づき逆立ちゴマの運動方程式の標準形を導き，その運動方程式に基づき Mathematica 上で逆立ちゴマの数値シミュレーションを行った．シミュレーションの結果実際に逆立ちゴマが逆立ちをすることが観察された．その過程で角速度ベクトルの方向はほぼ真上をむいており，コマ本体は逆立ちをするのにもかかわらず，一定方向に回り続けていることが観察された．すなわち，コマを上から見たとき左回りに回転させると，そのままの回転方向を保って，逆立ちし，逆立ちしたあとも上から見て左回りに回転を続けることが分かった．この現象は，実際の逆立ちゴマで実験したときに気がつき，非常に不思議に思ったがシミュレーションにおいてもそれが再現できた．

参考文献

[1] 近藤凌 :「コマの運動のシミュレーション」，南山大学情報理工学部卒業論文 (2016).

[2] 十河清・和達三樹・出口哲生 :「ゼロからの力学 I II」．岩波書店，東京（2013).