

回転角モデルによる剛体折り紙構造の表現

2013SE014 : 藤掛 揮星

指導教員 : 杉浦 洋

1 剛体折りとは

剛体折りとは、複数の剛体多角形が辺をヒンジとして接合された、動く多面体作品である。剛体折りは、適切に設計することにより、滑らかに形状変化させることができる。剛体折りの幾何学的モデルとして、(1) 不安定トラスモデルと(2) 回転角モデルがある。このどちらかで矛盾無くモデル化できれば、その作品は「剛体折り」である。

また、剛体折り作品をどちらかでモデル化することにより、自由度や形態変化を幾何学的・力学的に解析することができる。本稿では、剛体折り紙を回転角モデルとして解析する。また、剛体折り紙作品を製作し、実際に折り畳むことができるのか、調べることを目標とする。

2 回転角モデル

回転角モデルは、不安定トラスモデルとは違い、多角形パネルと回転ヒンジによって構成されるものである。回転ヒンジの回転角により形状が変化する。ヒンジは切り離されてはいけなため、頂点を1周したときに角度、位置に矛盾があってはいけない。内部の辺の数だけ角度があり、その角度を決めると形が決まる。つまり、ヒンジの数だけ変数がある。ただ、その変数は全ての角度を自由にとれるわけではない。いくつかの多角形が囲む内部頂点があると、その頂点に集まるヒンジの回転角に制約が発生する。これを連結条件とよぶ。折り紙がディスク同相であるとき、拘束条件は連結条件のみである。

ある内部頂点周りの連結条件について考える。内部頂点を P とし、 P に集まる n 本のヒンジを半時計回りに番号をつけて $H_1 \sim H_n$ 、ヒンジ H_i と H_{i+1} の点 P における角度を θ_i とする。ただし、 θ_n は H_n と H_1 のなす角である。ヒンジ H_i の回転角を ϕ_i とする。また、回転行列より

$$X_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_i & -\sin \phi_i \\ 0 & \sin \phi_i & \cos \phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。このとき内部頂点 P に関する連結条件は、

$$R(P) = X_n \dots X_1 = I$$

である。

$R(P)$ は3次直行列だから、その(1,2)、(1,3)、(2,3)成分が0になれば、単位行列となる。従って、連結条件は $(R(P))_{12}=0$ 、 $(R(P))_{13}=0$ 、 $(R(P))_{23}=0$ の3つである。よって、全体では、回転角モデルの形状は内部頂点数 $\times 3$ の制約条件がある。つまり、ヒンジの総数 - 内部の頂点数 $\times 3$ の自由度となる。

3 デパートの買い物袋の解析

デパートの買い物袋(図1)を剛体折り紙構造としてモデル化して調べてみた。結論を言うと、買い物袋は折り畳めない、という意外な結果となった。そこで、剛体パネルで構成しても折り畳める買い物袋を考えてみた。

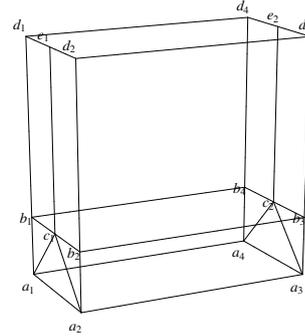


図1 買い物袋の骨格

3.1 幾何学的考察

折り畳みの過程における頂点の座標変化を調べる。右方向に x 軸、奥行き方向に y 軸、上方向に z 軸をとる(図4.3)。原点は底面の長方形 $a_1 a_2 a_3 a_4$ の中央にとる。辺 $a_1 a_2$ の長さを 2 、 $a_2 a_3$ の長さを $2L$ とすると、各頂点の図4.3に示した初期位置での座標は、

$$\begin{aligned} a_1 &= (-L, 1, 0), a_2 = (-L, -1, 0), a_3 = (L, -1, 0), a_4 = (L, 1, 0), \\ b_1 &= (-L, 1, 1), b_2 = (-L, -1, 1), b_3 = (L, -1, 1), b_4 = (L, 1, 1), \\ c_1 &= (-L, 0, 1), c_2 = (L, 0, 1) \end{aligned}$$

である。長方形パネル $a_1 a_2 a_3 a_4$ を固定して考える。

左の直角二等辺三角形パネル $a_1 a_2 c_1$ が内側に折れると、 c_1 の座標は、パラメタ s を用いて、

$$c_1 = (-L + s, 0, \sqrt{1 - s^2}) \quad (0 \leq s \leq 1)$$

と書ける。奥の長方形パネル $a_1 a_4 b_4 b_1$ が内側に折れると、 b_1, b_4 の座標は、パラメタ t を用いて、

$$b_1 = (-L, 1 - \sqrt{1 - t^2}, t), b_4 = (L, 1 - \sqrt{1 - t^2}, t) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

と書ける。しかし、 $b_1 c_1$ の長さは1に制約されているので、

$$t = \frac{2\sqrt{1 - s^2}}{2 - s^2}$$

となり、パネル $a_1a_4b_4b_1$ の位置はパラメタ s で決定される。

同様に、手前の長方形パネル $a_2a_3b_3b_2$ の位置もパラメタ s で決定される。

さらに、逆の関係

$$t = \sqrt{\frac{2(1-t^2)}{1-t^2 + \sqrt{1-t^2}}}$$

で、パネル $a_2a_3b_3b_2$ が右の直角二等辺三角形パネル $a_4a_3c_2$ の内側への折曲がりを決定する。

折り畳み途中の買い物袋 (図 2) を考える。簡単のために上部は側面だけを描いた。

左側面の辺 c_1e_1 は左 2 枚の長方形側板に共有されるので、 $\Delta b_1b_2c_1$ と直交する。ゆえに、 e_1 の座標が決定する。これにより、長方形 $e_1c_1b_1d_1$ の頂点として d_1 が決定する。同様に d_2 が決定する。

同様の考察を右側面で行えば頂点の座標は全て決定する。

さて、 b_4 と c_1 の z 座標の差は、

$$\begin{aligned} (b_1)_z - (c_1)_z &= t - \sqrt{1-s^2} = \frac{2\sqrt{1-s^2}}{2-s^2} - \sqrt{1-s^2} \\ &= \sqrt{1-s^2} \frac{s^2}{2-s^2} > 0 \quad (0 < s < 1) \end{aligned}$$

ゆえに、変形途中 ($0 < s < 1$) では c_1 の方がいつも低い位置にあり、 $\Delta b_1b_2c_1$ は右に傾いている。ゆえに、 x 座標は b_1 の d_1 の x 座標より大きくなっている。 d_4 の x 座標は b_4 の x 座標より小さくなっている。このことは、四角形 $b_1b_4d_4d_1$ が長方形であることに反する。

よって、買い物袋は折り畳めない。

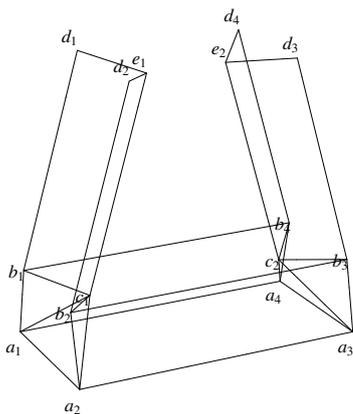


図 2 買い物袋下部と側面 ($s=0.6$)

3.2 折り畳める買い物袋の提案

剛体折りの買い物袋を作るためには、 $\|d_1 - d_4\| = \|d_2 - d_3\|$ が $\|b_1 - b_4\| = \|b_2 - b_3\|$ より小さくできる構造にすれば良い。そのために、初期位置の長方形パネル $b_1b_4d_4d_1$

を辺 d_4d_1 の二等分点 f_1 により、3 つの三角形パネル $\Delta b_1f_1d_1$, $\Delta b_1b_4f_1$, $\Delta b_4d_4f_1$ に分割する。手前の長方形パネル $b_2b_3d_3d_2$ にも同じ処理を施す (図 3)。

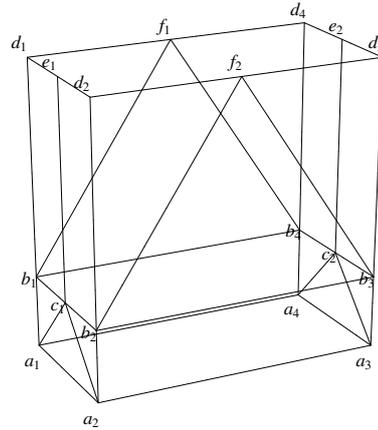


図 3 折り畳める剛体折り買い物袋 ($s=0.0000000001$)

実際に f_1 , f_2 を外向きに動かした様子が図 4 である。折り畳みを進めると、 f_1 , f_2 の動きがあるときに反転し、内向きに動き始める。最後はぴったり閉じる (図 5)。

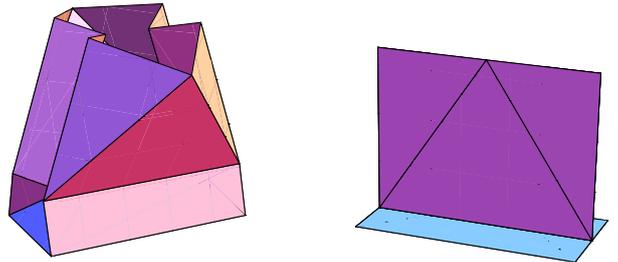


図 4 折り畳み途中の剛体折り買い物袋 ($s=0.4$)

図 5 折り畳まれた剛体折り買い物袋 ($s=0.999999999$)

シミュレーションのプログラムで $s=0, 1$ とすると、エラーが起きる。 d_1 , f_1 , d_4 が一直線に並ぶとき、頂点 f_1 を決める方程式がうまく解けなくなったためである。

4 おわりに

本研究では、Mathematica を用いて買い物袋の回転角モデルを作成した。解析的自由度の解析の結果、買い物袋の回転角モデルは折り畳めないという結果になった。また、幾何学的な考察でも、自由度が 0 の場合買い物袋の回転角モデルは、折り畳めないことが確認できた。

今後、昆虫の外骨格のような構造を剛体折り紙としてモデル化することも興味深い課題である。

参考文献

- [1] 野島武敏, 荻原一郎:『折り紙の数理とその応用』, 共立出版 (2012)