What-if-not strategy による発展的教材の研究

―角度の問題を中心として―

2013SE254 山下 貴央
指導教員: 佐々木 克巳

1 はじめに

本研究の目的は，中学校の図形問題における，各問題の本質を把握し，様々な図形の性質を発見しながら，図形分野に対する理解を深め，数学の授業を行う際に役立てることである．研究の動機は，3 年次の「情報システム数理演習 II」で行った，図形問題の What-if-not strategy の研究に興味をもち，研究を重ね自身の数学教育に活かしたいと考えたからである．具体的には，角度の問題を取り上げ，その問題に対して What-if-not strategy を用いて問題を考察する．ここで What-if-not strategy とは，1 つの問題に対して“もしそうでなかったら”を考えることによって，問題の理解を深める方法である([2])．本研究では，問題の作り変えとして適用する．

卒業研究では，連続した二等辺三角形の問題，角の三等分線の問題，ブーメラン型を利用した問題の 3 つの問題を研究し，本稿ではそのうちの，角の三等分線の問題を示す．

具体的には，2 節で問題の作り変えによる考察を行い，3 節で他の問題との関係を明らかにし，4 節でまとめの考察を行う．

2 角の三等分線の問題

この節では，[1]の問題 86 の(1)に対し，問題の作り変えによる考察を示す．

問題 86 の(1)

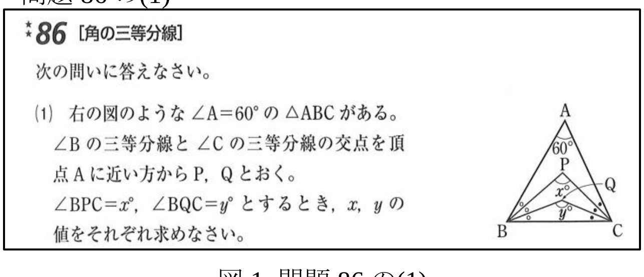

*86 [角の三等分線]
次の問いに答えなさい。
(1) 右の図のような $\angle A=60°$ の $\triangle ABC$ がある。$\angle B$ の三等分線と $\angle C$ の三等分線の交点を頂点 A に近い方から P，Q とおく。$\angle BPC=x°$，$\angle BQC=y°$ とするとき，x，y の値をそれぞれ求めなさい。

図 1：問題 86 の(1)

解）三角形 ABC において，内角の性質から

$$\angle B + \angle C = 120°$$

$\angle B = 3b, \angle C = 3c$ とすると，

$$b + c = 40°$$

三角形 PBC において，内角の性質から

$$x = 180° - 2(b + c) = 100°$$

三角形 QBC において，内角の性質から

$$y = 180° - (b + c) = 140°$$

よって，$x = 100°, y = 140°$

問題の作り変え

問題の作り変えは，線分 BP,CP,BQ,CQ を延長し，次の様に行う．

CP の延長線と AB との交点を D，CQ の延長線と AB との交点を E，BP の延長線と AC との交点を G，BQ の延長線と AC との交点を F とし，点 P を J，点 Q を K と改める．

また，8 個の角 $\angle D, \cdots, \angle K$を図 2 の位置とする．

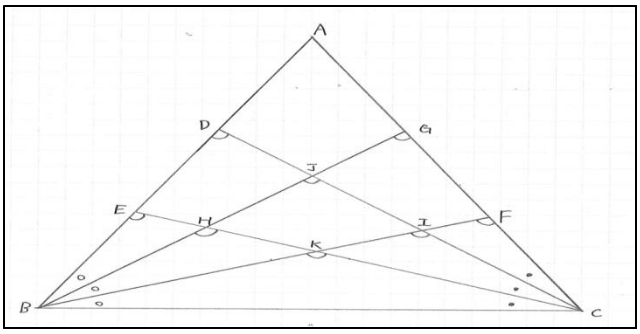


図 2：作り変え後の図

このとき，11 個の角 $\angle A, \cdots, \angle K$を全て求めるために必要な条件（必要な角）を考察する．$\angle A = 60°$は前提条件から外すことになる．

はじめに$\angle A$，$\angle J$，$\angle K$ について考える．もとの解より，$b + c$ に注目すると，

$$\angle A = 180° - 3(b + c)$$
$$\angle J = 180° - 2(b + c)$$
$$\angle K = 180° - (b + c)$$

したがって，

<u>$\angle A$，$\angle J$，$\angle K$，$b + c$ はどれか 1 つでも分かれば他の 3 つを求めることができる</u>．（i）

次に，6 つの角$\angle D, \cdots, \angle I$について考える．6 つの角$\angle D, \cdots, \angle I$を b と c を使って表すと，

$$\angle D = 180° - (3b + 2c) = 180° - 2(b + c) - b$$
$$\angle E = 180° - (3b + c) = 180° - (b + c) - 2b$$
$$\angle F = 180° - (b + 3c) = 180° - (b + c) - 2c$$
$$\angle G = 180° - (2b + 3c) = 180° - 2(b + c) - c$$
$$\angle H = 180° - (2b + c) = 180° - (b + c) - b$$
$$\angle I = 180° - (b + 2c) = 180° - (b + c) - c$$

以上より，

・b と c が分かれば，6 つの角$\angle D, \cdots, \angle I$ を求めることができる．

・6 つの角$\angle D, \cdots, \angle I$ のうちの 1 つと b が（c または

$b + c$ が）分かれば，6 つの角と b と c を全てを求めることができる．

・6 つの角∠D,⋯,∠I のうちのどれか 2 つ分かれば，それを左辺とする 2 つの等式を連立させて b と c を求めることができる．したがって，

6 つの角∠D,⋯,∠I と，2 つの値 b と c のうち，どれか 2 つが分かれば他の 6 つを求めることができる．（ii）

（i），（ii）から，6 つの角∠D,⋯,∠I と2 つの値 b と c のうち，どれか 2 つが分かれば，9 つの角∠A，∠J，∠K，∠D,⋯,∠I を求めることができる．

また，$\angle B = 3b, \angle C = 3c$ であるので，8 つの角∠B,⋯,∠Iのどれか 2 つが分かれば，11 個の角∠A,⋯,∠K の全てを求めることができる．

さらに，（i）から，∠A，∠J，∠K のどれか 1 つが分かれば，$b + c$ を求めることができるため，加えて 6 つの角∠D,⋯,∠I のどれか 1 つが分かれば，b と c を求めることができ，11 個の角∠A,⋯,∠K の全てを求めることができる．

以上の結果から，この問題では，「『∠A，∠J，∠K から 2 つ』以外の組み合わせで，角が 2 つ与えられたとき，その 2 つから全ての角を求めることができる．」ことが分かった．

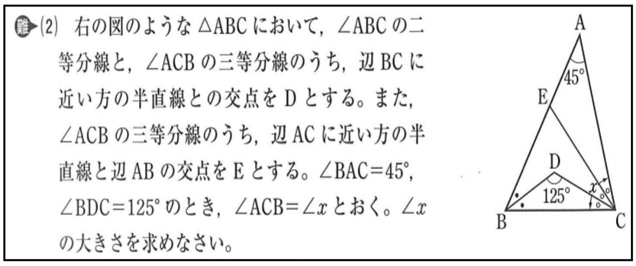
この条件は，逆，すなわち，「『∠A，∠J，∠K から 2 つ』の組み合わせで，角が 2 つ与えられたとき，求められない角がある．」も成り立つ．例えば $\angle A = 60°, \angle J = 100°$，$\angle K = 140°$のとき，残り 8 個の角はどれも定まらない（図 3 参照）．

なお，上の結果は，連立方程式の係数行列の階数を用いても得られるが，ここでは中学校の範囲での解法で示している．

3 他の問題との関係

図 2 を使って条件を考察してきたが，その考察から，他の問題との関係が明らかになる．

例として，図 4 に示す[1]の問題 86 の(2)を考える．この問題は∠B の二等分線と∠C の三等分線を利用した問題である．この問題の三角形 ABC は図 2 の三角形 GBC に対応する（図 5 参照）．



(2) 右の図のような△ABCにおいて，∠ABCの二等分線と，∠ACBの三等分線のうち，辺BCに近い方の半直線との交点をDとする。また，∠ACBの三等分線のうち，辺ACに近い方の半直線と辺ABの交点をEとする。∠BAC=45°，∠BDC=125°のとき，∠ACB=∠xとおく。∠xの大きさを求めなさい。

図 4：問題 86 の(2)

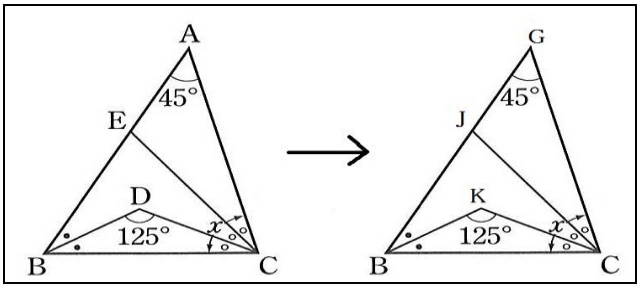


図 5：記号の対応

図 2 において，$\angle G = 45°, \angle K = 125°$の場合を考えると，

$$\angle G = 180° - (2b + 3c) = 45°$$

$$\angle K = 180° - (b + c) = 125°$$

となり，計算すると$c = 25°$になる．よって，図 5 の対応づけによって，図 4 の解は $x = 75°$となる．

この問題だけでなく，図 2 の三角形 JBC に注目すれば∠B と∠C の二等分線の問題もできる．

これらのことから，2 節でまとめた条件は，基礎から応用まで幅広く考えることのできる条件といえる．

4 考察

2 節でまとめた条件から，角の三等分線だけでなく，角の二等分線の問題や，両者の複合問題においても同様に考えることで，基礎的な問題から応用問題にまで発展させることができることが分かった．問題を作成するうえで注意しなければならない点と，問題の関連性を同時に確認することができた．

参考文献

[1] 益井英郎:『最高水準特進問題集 数学 中学 2 年』. 株式会社文英堂，京都，2012.

[2] S.I. ブラウン，M.I. ワルター著 平林 一榮監訳：『いかにして問題をつくるか―問題設定の技術』. 東洋館出版．東京．1990

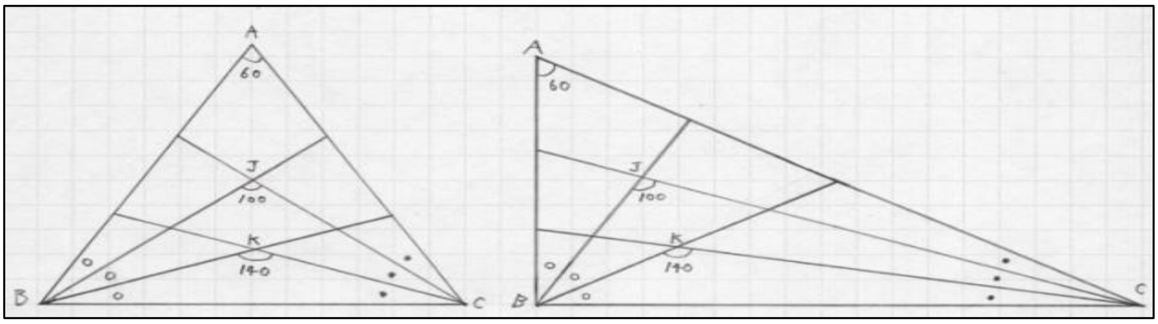


図 3：8 個の角が定まらないことを示す図