図形を用いたシークエント計算とその実践

2013SE171 坂口晃輔
指導教員:佐々木克巳

1 はじめに

証明をシークエントで表現すると，その筋道だけでなく，構想(その証明に至った経緯)も表現できる．一方，図形を対象とした証明の構想は，図に条件を書き込みながら，行うことが多い．図に書き込むことで，視覚的にも理解が深まるからだと考える．

本研究の目的は，これら 2 つのよさをとりいれた手法を提案し，実際の問題に適用する，すなわち，「図形を用いたシークエント」を導入し，その変化で，証明の構想を表現することである．対象は中学校数学の図形分野である．

本研究では，2 つの具体的な証明問題の複数の構想を，「図形を用いたシークエント」で表現し，比較した．

本稿では，2 節で図形を用いたシークエント計算を導入し，3 節で，本研究で扱った 2 つの問題のうちの 1 つの問題に対する結果を示す．

2 図形を用いたシークエント計算

この節では，「図形を用いたシークエント計算」を導入する．

まず，[1]にしたがい，シークエントを導入する．文 $P, P_1, \cdots, P_n$に対して，表現

$$P_1, \cdots, P_n \to P \qquad \text{(s1)}$$

をシークエントという．“$P_1, \cdots, P_n$”をこのシークエントの左辺，Pを右辺という．ここで，左辺の各P_iの順番と重複は，異なっていても同じシークエントとみなす．

シークエント(s1)において，各P_iは，使える性質，Pは導きたい性質を表す．すると，文Pから文Qを導く推論は，

$$\begin{array}{ccc} Q, R_1 \cdots, R_n \to R & & R_1 \cdots, R_n \to P \\ \Downarrow & \text{または} & \Downarrow \\ P, R_1 \cdots, R_n \to R & & R_1 \cdots, R_n \to Q \end{array}$$

というシークエントの変化で表現できる．以後，n 個のシークエント$S_1 \cdots, S_n$からシークエントSへの変化を

$$\frac{S_1 \cdots S_n}{S}$$

と表し，これを推論規則という．各S_iをこの推論規則の上式，Sを下式という．推論規則において，上式左辺では，下式左辺の部分列を“↑”で，上式右辺と下式右辺が一致するときは，上式右辺を“↓”で表してもよいとする．

「図形を用いたシークエント」は(s1)の各P_iとPを，その意味を表す図形に置き換えて得られる表現である．「その意味を表す図形」とは，慣例的に用いられている図1，図 2 のような図形である．ただし，図 2 の●は，○，×などの別の記号でも表現可能とする．図 1 も同様である．また，△ABC≡△DFE は，図 3 のように頂点の名前を○や△で囲むことによって，対応する頂点が分かるようにする．さらに，本稿では示さないが，本研究では平行や，比が等しいことを表す図も導入している．

また，「図形を用いたシークエント」では，右辺においては「導きたい性質」を，左辺においては，「(下式と比べ)新しく加わった性質」を赤で示すことにする．例えば，∠C=∠F を導きたい場合は図 4 のように表す．

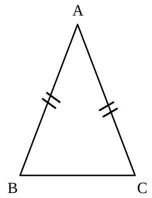


図 1:AB=AC を表す図形

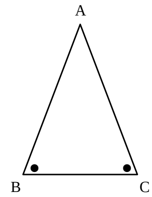


図 2:∠B=∠C を表す図形

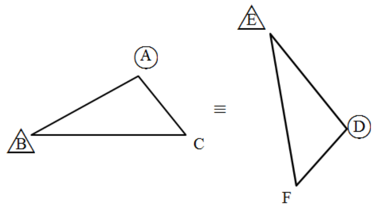


図 3:ΔABC≡△DEF を表す図形

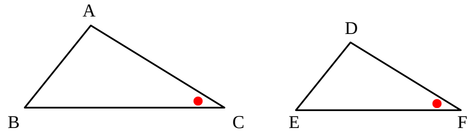
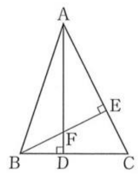


図 4:∠C=∠F を導く図形

3 具体例

この節では，[2]の問題 304 の証明の構想を「図形を用いたシークエント」の変化で表現する．

304 右の図のような ∠BAC=45° の △ABC において，2 点 A，B から対辺にそれぞれ垂線 AD，BE をひき，AD と BE の交点を F とする。このとき，△AFE≡△BCE であることを証明しなさい。 〔佐賀〕

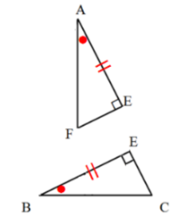
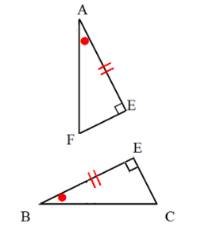
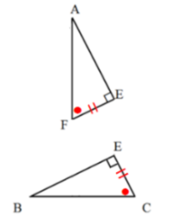


この証明の構想を「図形を用いたシークエント」の変化で 3 通りに示す(図 5〜図 7)．各図において，一番下のシークエントが，この問題の目的を示し，各図は，そこから上に向かって作成される．

図 5〜図 7 を比較した結果を次の表 1 にまとめる．

右辺を変形していく図 6 と図 7 ではその図を見たとき何を求めていくのか，つまりこの問題ではどの合同条件を用いたのかがすぐにわかる(下から 2 段目)．またほかの部分も，何から何が導かれるのかの筋道がわかりやすい．一方，左辺を変形していく図 5 の場合，新しく加わった性質が導かれた性質と分かるが，左辺にある複数の性質のうち，どれから導かれたかが分かりにくくなってしまう．しかし，実際の証明文は，左辺を変形していく構想と同じ手順でかかれることが多い．

表 1:図 5～図 7 の比較

図	図 5	図 6	図 7
変形	左辺変形	右辺変形	右辺変形
合同条件			
証明の発想	二等辺三角形から，辺が等しいこととその両端の角が求まるだろうという発想	図 7 と同様の発想	注目した辺が FE=CE であり，その両端の角が求まるだろうという発想

本研究では，本稿の例以外にも，証明の構想を「図形を用いたシークエント」で表現した．この経験から，一般に次が言えると考える．「図形を用いたシークエント」で証明の構想を表現することにより，証明の構想の各ステップで何を求めるべきなのか，どのように証明を進めるのかが視覚的に理解できるようになっている．また，出来上がった図式からは証明が複雑な場合でも，何が導かれたのか，どの性質から導かれたのかが分かりやすくなっている．これらは，本研究の手法が，実際の証明をどのように構想するかを考えるとき，また，実際に行った構想を振り返るときに，有効であることを示している．

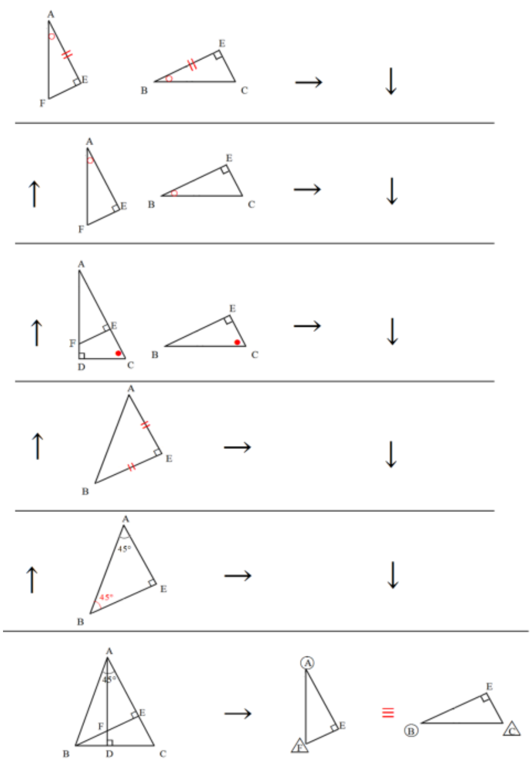


図 5:左辺を変形していく構想

参考文献

[1] 佐々木克巳,『証明の構想を表現する新しい図式の提案』, 数学教育学会誌, 2015, 年度数学教育学会春季年会発表論文集，数学教育学会，2015，pp.208-210

[2] 畑史郎,『国立･難関私立高校制覇 ハイクラス徹底問題集高校入試 数学』, 株式会社文理，東京，2016

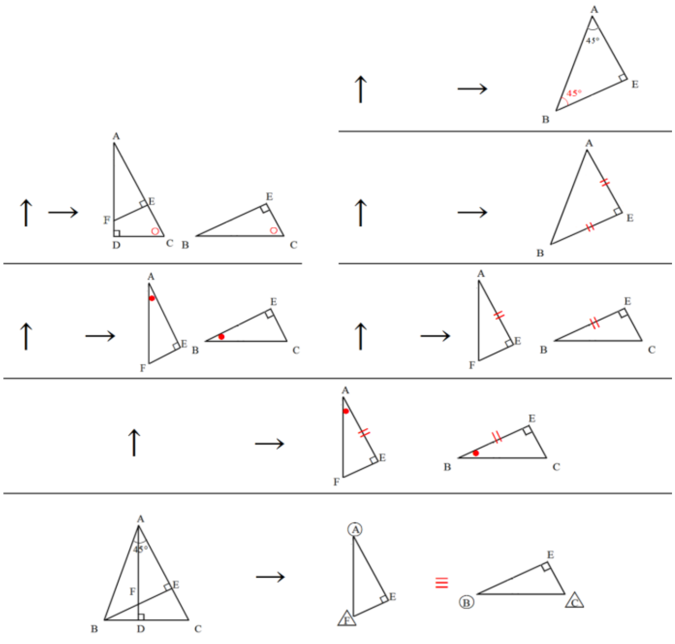


図 6:右辺を変形していく構想 1

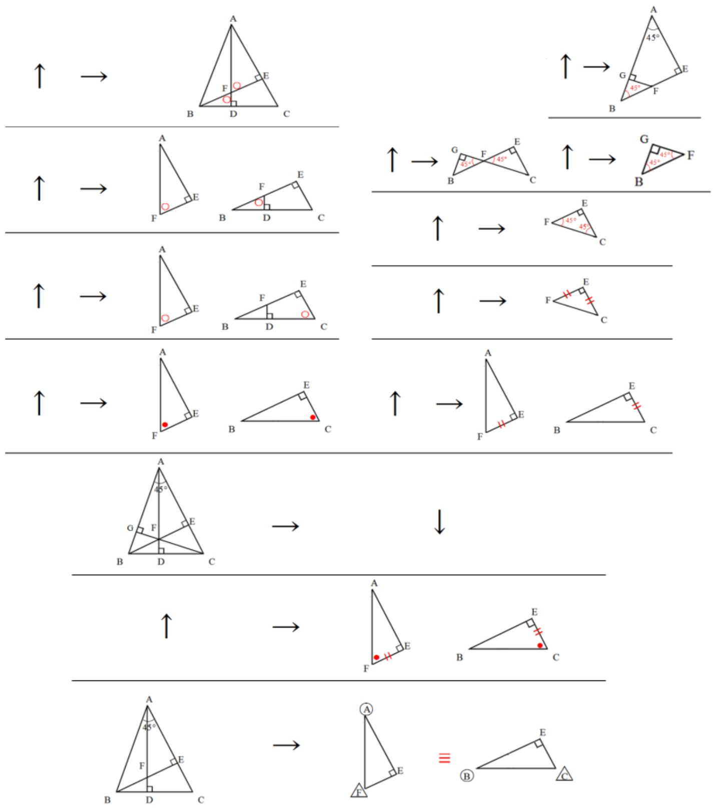


図 7:右辺を変形していく構想 2