問題の条件変えによる難易度変化に着目した教材研究
－三角比の問題を中心として－

2013SE151 大口 真央
指導教員: 佐々木 克巳

1 はじめに

本研究の目的は, 高等学校数学における, 問題の条件変えによる難易度変化に着目した教材研究である. 教科書や問題集には類似した図形の問題があり, それらのいくつかは, 1 つの問題から問題文の前提条件を変えることで得られているが, その難易度は同じではない. つまり, 問題の条件変えによる難易度変化の考察は, 応用問題の作成に役立つと考える. また, その問題が重要視している課題を知ることができ, 何に注目すべきかわかる. 私は教員として働くことを志願しており, その意味でも本研究が役立つと考える.

本研究が対象とする範囲は, 高等学校数学 I の「三角比」とし, とくに図形を利用した問題を中心とする.

本研究では, 具体的な 2 つの問題に対し, 条件変えによる難易度変化を考察した. 第 1 の問題では 2 種類, 第 2 の問題では, 5 種類の条件変えを対象とした. 本稿では第 2 の問題に対する 5 種類の条件変えのうちの, 2 種類について, 考察した結果を示す.

以下の 2 節で, 条件変えの対象となる問題と, 2 種類の条件変えを示す. 3 節で, 2 節の条件変えのそれぞれに対して, 目的の値を求めるために用いられた性質や手法を整理し, 難易度の変化を考察する.

2 問題の条件変え

この節では, 条件変えの対象となる問題と, 2 種類の条件変えを示す. もとの問題([1]の p. 223)を以下に示す.

【練習 148】

三角形 ABC の∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とする. 次の各場合について, 線分 BD, AD の長さを求めよ.

(ⅰ) AB=6, BC=5, CA=4

(ⅱ) AB=6, BC=10, ∠B＝120°

2 種類の条件変えを, 表 1, 表 2 に示す. 各表において, ○は, その記号が記入されている角度や辺は, その値が前提条件として与えられていることを示し, 空欄は, その角度と辺が, 求めたい値であることを示す. また, 各表には示していないが, この 2 種類の条件変えでは, 条件

(1) ∠BAD=∠DAC(AD が∠A の二等分線であること)は変えていない.

表 1 条件変え 1

(2)	(3)	(4)				
BC	AB	AC	BD(DC)	∠A	∠B	∠C
○	○	○				
○	○		○			
○	○			○		
○	○				○	
○	○					○

表 2 条件変え 2

(2)	(3)	(4)				
BC	∠B	AB	AC	BD(DC)	∠A	∠C
○	○	○				
○	○		○			
○	○			○		
○	○				○	
○	○					○

3 条件変えによる難易度の変化

この節では, 前節の条件変えのそれぞれに対して, 目的の値を求めるために用いられた性質や手法を整理し, 難易度の変化を考察する. 表 1 の条件変えを 3.1 節で, 表 2 の条件変えを 3.2 節で扱う.

3.1 表 1 の条件変え

ここでは, 表 1 の条件変えを考える. この条件変えで共通する前提条件は, 以下の＜前提条件 1＞に示す 3 つの条件である.

＜前提条件 1＞

(1) ∠BAD=∠DAC

(2) BC

(3) AB

(2), (3) は, その辺の値が前提条件として考えられている, という意味である. この＜前提条件 1＞を前提としたときの辺や角度の値の導出関係を整理し図 1 に示す.

図 1 において, 各矢印は「その始点にある値から, その終点にある値を, 矢印の近くに書いてある手法で導くことができること」を示す. 手法を示す等式は, その方程式の解が, 求める値(矢印の終点にある変数の値)であることを示す. ∠A, ∠B, ∠C から, 外側をまわって BD と DC に向う矢印の近くには「余弦定理〔1〕, 〔4〕」と示してあるが, これは, 「余弦定理〔1〕を用いて AC を求め, 〔4〕を用いて, BD と DC を求める. 」という意味である. 他も同様である.

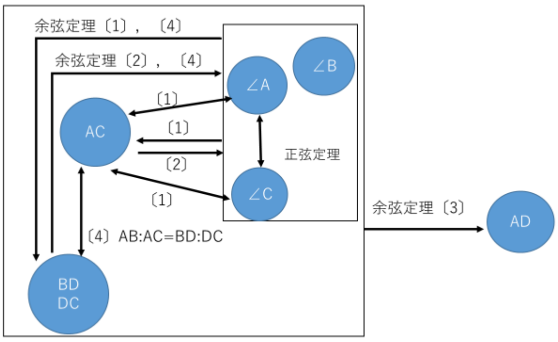

図 1　<前提条件 1>における値の関係図

図 1 における等式〔1〕～〔3〕は以下のとおりである.

〔1〕－1: $BC^2 = AB^2 + x^2 - 2AB \cdot x\cos A$, x=AC

2: $x^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos B$, x=AC

3: $AB^2 = BC^2 + x^2 - 2BC \cdot x\cos C$, x=AC

〔2〕－1: $\cos\theta = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB \cdot AC}$, $\theta = A$

2: $\cos\theta = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB \cdot BC}$, $\theta = B$

3: $\cos\theta = \frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC \cdot BC}$, $\theta = C$

〔3〕－1: $BD^2 = AB^2 + x^2 - 2AB \cdot x\cos\frac{A}{2}$, x＝AD

1: $DC^2 = AC^2 + x^2 - 2AC \cdot x\cos\frac{A}{2}$, x＝AD

2: $x^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD\cos B$, x＝AD

3: $x^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC \cdot DC\cos C$, x＝AD

〔1〕,〔2〕,〔3〕のそれぞれで, 複数の等式が示されているのは, 与えられた値または求めたい値によって必要な式が異なるからである. たとえば〔1〕の 1 は∠A が, 2 は∠B が, 3 は∠C が与えられた場合の等式である.

また, 図 1 で BD と DC がまとめられているのは, (2)より, 片方からもう片方を求めることができるからである.

次に難易度を考察する. ここでは, 2 つの視点

・方程式をたてる必要性

・2 乗と平方根を求める必要性

を基準として考える. 図 1 の矢印の表す導出関係の難易度をこの視点でまとめると, 表 3 のようになる.

表 3　導出関係の難易度

式		方程式をたてる必要性	2 乗と平方根を求める必要性
〔1〕	1	必要	必要
	2	不要	必要
	3	必要	必要
〔2〕	1	不要	必要
	2	不要	必要
	3	不要	必要
〔3〕	1	必要	必要
	2	不要	必要
	3	不要	必要
〔4〕		不要	不要

表 3 より, 難易度の高い矢印は,

〔1〕の 1 （∠A から AC を求める）

〔1〕の 3 （∠C から AC を求める）

〔3〕の 1 （∠A, BD から AD を求める）

の 3 つである. 図 1 の他の矢印も眺めてみると<前提条件 1>のもとで, 最も難易度が高いのは, ∠A が与えられて AD を求める問題, すなわち, 以下の問題である.

【問題 3.1】

三角形 ABC の∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とする. AB=6, BC=$3\sqrt{6}$, ∠A=120° のとき, AD の値を求めよ.

3.2　表 2 の条件変え

ここでは, 表 2 の条件変えを考える. この条件変えで共通する前提条件は, 以下の<前提条件 2>に示す 3 つの条件である.

<前提条件 2>

(1) ∠BAD=∠DAC

(2) BC

(3) ∠B

この<前提条件 2>を前提としたときの辺や角度の値の導出関係を整理し図 2 に示す.

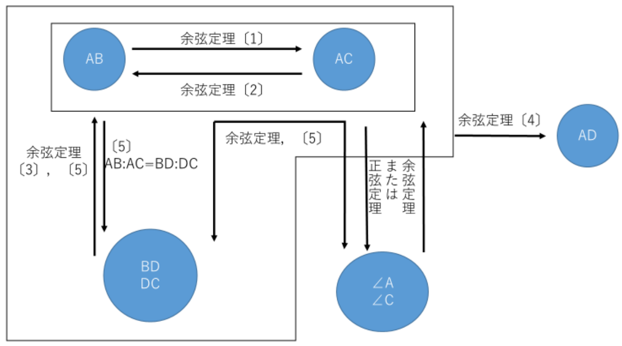

図 2　<前提条件 2>における値の関係図

〔1〕～〔4〕は以下のとおりである.

〔1〕: $x^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos B$, x＝AC

〔2〕: $AC^2 = x^2 + BC^2 - 2BC \cdot x\cos B$, x＝AB

〔3〕: $\left(\frac{DC}{BD}x\right)^2 = x^2 + BC^2 - 2BC \cdot x\cos B$, x＝AB

〔4〕: $x^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD\cos B$, x＝AD

図 2 の矢印の表す導出関係の難易度を, 3.1 節と同じ 2 つの視点でまとめると, 表 4 のようになる.

表 4　導出関係の難易度

式	方程式をたてる必要性	2 乗と平方根を求める必要性
〔1〕	不要	必要
〔2〕	必要	必要
〔3〕	必要	必要
〔4〕	不要	必要
〔5〕	不要	不要

最も難易度が高いのは, BD(DC)が与えられた問題, その次は AC が与えられた問題である. よって, 最も難易度の高い問題は以下である.

【問題 3.2】

三角形 ABC の∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とする. BC=5, ∠B=60°, BD:DC＝3:4 のとき, AD の値を求めよ.

参考文献

[1] チャート研究所:『新課程チャート式　基礎からの数学Ⅰ＋A』. 数研出版, 東京, 2016