証明図を用いた証明の発想法の分析

ー 三角関数の加法定理を対象として ー

2013SE035 東恩納 慎

指導教員：佐々木 克巳

1 はじめに

本研究の目的は，既にある複数の証明から，その証明における各推論が適用された理由(発想法)を読みとり，その発想法と用いられた場面との関係を整理することである．その手法として，証明をシークエントの変化で表現した図式(証明図という)を用いる．対象とする証明は，三角関数の加法定理の証明である．具体的には，いくつかの文献から 6 個の加法定理の証明を抽出して，それぞれの証明を個別に分析した．さらに，6 つの分析結果から，概念別に発想法を分析した．

本稿では，3 節で 6 個の証明のうちの 1 個(定義にもとづく証明[3])の分析結果と 6 個の証明に対する概念別の分析を示す．2 節ではそれらの分析のための証明図を導入する．

2 シークエントと証明図

この節では，[2]にしたがって，シークエントを導入し，さらに，そのシークエントの変化により証明を表現した証明図を導入する．

2.1 シークエント

ここでは，シークエントを導入する．

文P，P_1，…，P_nに対して，表現

$$P_1, \cdots, P_n \to P \qquad \text{(S1)}$$

をシークエントという．“P_1，…，P_n”をこのシークエントの左辺，P を右辺という．左辺における各P_iの順番と重複は考えないものとする．例えば

$$P, P, Q \to R$$
$$P, Q \to R$$
$$Q, P \to R$$

はどれも同じシークエントと考える．シークエント(S1)において，各P_iは使える性質，Pは導きたい性質を表す．

2.2 証明図

ここでは，証明を，シークエントの変化で表現した図式として，証明図を導入する．

証明は推論を繰り返して構成される．故に，証明における各推論をシークエントの変化で表現できれば，証明もシークエントの変化で表現できる．たとえば，文Pから文Qを導く推論は，2.1 節で示したシークエントの解釈から，

$$\begin{array}{ccc} Q, R_1, \cdots, R_n \to R & & R_1, \cdots, R_n \to P \\ \Downarrow & \text{または} & \Downarrow \\ P, R_1, \cdots, R_n \to R & & R_1, \cdots, R_n \to Q \end{array}$$

のいずれかのシークエントの変化で表現できる．

以後 n 個のシークエントS_1，…，S_nからシークエント S への変化を

$$\frac{S_1 \ \cdots \ S_n}{S}$$

と表現し，これを推論規則という．

ある推論規則$\frac{S_2}{S_1}$(I)の下式S_1が，別の推論規則$\frac{S_3 \ S_4}{S}$(J)の上式S_3と等しいとき，次のように(J)に(I)を積み上げることができる．

$$\cfrac{\cfrac{S_2}{S_1}(\mathrm{I}) \quad S_4}{S}(\mathrm{J})$$

この図は，(I)に対応する推論と(J)に対応する推論を続けて行う操作を表している．同様に考えると，証明は，推論規則を上のように積み上げた図式で表現できることになる．推論規則を上のように積み上げてできる図式を証明図という．証明図の一番上のシークエントは，既に正しいと認められた性質を表すことになる．

以下は，よく使う推論を表す推論規則であり，(cut)とよぶことにする．

$$\frac{P, R_1, \cdots, R_n \to Q}{R_1, \cdots, R_n \to Q}(\mathrm{cut})$$

ただし，Pは既に正しいと認められた性質である．

証明図を簡潔に表現するために，証明図の各推論規則において，上式左辺では下式左辺の部分列を“↑”で表してもよいとし，上式右辺と下式右辺が一致する場合，上式右辺を“↓”で表してもよいとする．この約束により，例えば、

$$\frac{P, R_1, \cdots, R_n \to Q}{R_1, \cdots, R_n \to Q}(\mathrm{cut})$$

は，

$$\frac{\uparrow, P \to \downarrow}{R_1, \cdots, R_n \to Q}(\mathrm{cut})$$

と表現できる．

3 証明の分析

この節では，この研究で対象とした 6 個の証明のうちの 1 個の分析結果，および，6 個の分析の結果から証明の発想の鍵となっている概念別の分析を行う．前者を 3.1 節に後者を 3.2 節に示す．

3.1 証明の分析

ここでは，本研究が対象とした 6 個の証明のうちの[3]に示された，定義にもとづく証明を分析する．[3]の証明の対象は次の性質である．

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad \text{(T1)}$$

この証明に対して

(i)その証明を証明図で表現すること．

(ii)証明図における各推論規則の発想の考察

の 2 つを行う．

まず，(i)の証明図を図 3 に示す．ただし，$\mathcal{P}$，$\mathcal{Q}$は証明図で，それらの一番下のシークエントはそれぞれ

$$\mathrm{Q}(\cos(-\alpha),\ \sin(-\alpha)),\ \mathrm{R}(\cos\beta,\ \sin\beta) \to \exists \mathrm{g}\left(\mathrm{QR}^2 = \mathrm{g}(\sin\alpha,\ \sin\beta,\ \cos\alpha,\ \cos\beta)\right)$$

$$\uparrow,\ \exists \mathrm{f}\left(\mathrm{AP}^2 = \mathrm{f}(\cos(\alpha+\beta))\right),$$
$$\exists \mathrm{g}\left(\mathrm{QR}^2 = \mathrm{g}(\sin\alpha,\ \sin\beta,\ \cos\alpha,\ \cos\beta)\right) \to \downarrow$$

である．$\mathcal{P}$，$\mathcal{Q}$のそれ以外の部分は省略する．また，証明図における表現「$\mathrm{B}(x,\ y)$」は「Bの座標は$(x,\ y)$である」を表し，表現「図 1」，「図 2」は，それらから読みとれる情報を示す．

(ii)の考察は以下のとおりである．

(1) 図 1，図 2 のように単位円上の点をとると，その座標に

$\cos(\alpha+\beta)$，$\sin\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\alpha$，$\cos\beta$が現れることから，図 1，図 2 のように 3 点P，Q，Rをとる．具体的には，始点となるx軸の正の部分と単位円との交点をAとおき，単位円上に3点P，Q，Rを，∠AOP＝$\alpha+\beta$，∠AOQ＝$-\alpha$，∠AOR＝βとなるようにとる．

(2) P，Q，Rの定義より，(1)で作ろうとした三角関数の値が，P，Q，Rの座標に現れるようにできた．

(3) (T1)の左辺がPの座標に現れ，右辺の三角関数がQ，Rの座標に現れることから，これらの関係を明確にすることで(T1)が導かれることが予想できる．Pと，2 点Q，Rの関係を探すと，線分APと線分QRの長さが等しいことに気づく．線分QRを原点のまわりに角αだけ回転すると，線分APに重なるからである．

(4) (3)での予想を具現化する．すなわち，AP^2を$\cos(\alpha+\beta)$を用いて表現すること，QR^2を$\sin\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\alpha$，$\cos\beta$を用いて表現すること，この2つの表現と$\mathrm{AP}=\mathrm{QR}$から(T1)を導くことの 3 つを行う．すなわち，この推論規則の上式は 3 つある．

(5) AP^2の値を求めるために，(cut)を適用し，2点間の距離の公式を導入する．

(6) 2点間の距離の公式を用いてAP^2の値を求める．

(7) $\sin^2\theta+\cos^2\theta$が現れるため，(cut)を適用し，三角関数の相互関係を導入する．

(8) (6)で導入した性質を適用可能にするため，θに$\alpha+\beta$を代入する．

(9) AP^2の値を三角関数の相互関係を用いて整理する．

(10) AP^2が具体的に$\cos(\alpha+\beta)$の式で表現された．

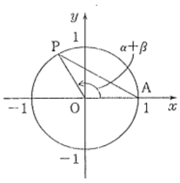


図 1：点 P(出典[3])

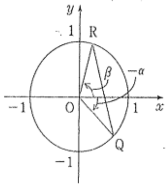
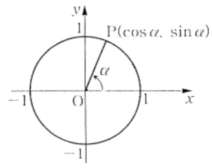
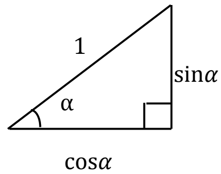
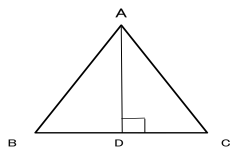


図2：点 Q，R(出典[3]

3.2 概念別の分析

ここでは，本研究で対象とした 6 個の証明の発想に利用された図形の公式，定理などの概念を抽出し，それらを使用する動機を表 1 にまとめる．

表 1:公式・定理を使用する動機

公式・定理	動機
単位円	sinα，cosα・を図で表現できる． 具体的には，次の図の通りである．この図は[1]の図の一部を変更したものである． 
直角三角形	・sinα，cosαを図で表現できる． 具体的には次の図の通りである． 
オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$	・$\cos(\alpha+\beta)$と$\sin(\alpha+\beta)$を$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\beta$で表現できる． 具体的には，オイラーの公式と$e^{i(\alpha+\beta)}=e^{i\alpha}e^{i\beta}$と合わせて用いる．
ベクトルの内積	・定義と成分表示の関係を利用できる． 具体的には，$\vec{a}=(a_1, a_2)$，$\vec{b}=(b_1, b_2)$，$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角をθとしたとき，等式$\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$を利用できる．
1 つの三角形の 2 つの直角三角形への分割	・もとの三角形の面積を 2 つの直角三角形の面積の和で表現できる． 具体的には，以下の図において△ABC＝△ABD＋△ACDである． 
図の回転	・α＋βを始線によって，αとβに分けられる． 具体的には，図 1 のα＋βを図 2 のようにαとβに分けられる．

参考文献

[1] 岡本和夫ほか１０名，『数学Ⅱ』，実教出版，東京，2015

[2] 佐々木克巳，『2015 年度数理論理学講義資料』，南山大学，2015

[3] 本庄隆，『東大の理系数学25ヵ年［第8版］』，教学社，京都，2016

$\uparrow\to \mathrm{AP}^2=2-2\cos(\alpha+\beta)$

———— (10)

$\mathrm{AP}^2=2-2\cos(\alpha+\beta)\to\downarrow$

———— (9)

$\uparrow,\ \sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=1\to\downarrow$

———— (8)

$\uparrow,\ \forall\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta=1)\to\downarrow$

———— (7)

$\mathrm{AP}^2=\{\cos(\alpha+\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha+\beta)\to\downarrow$

———— (6)

↑，2 点間の距離の公式 →↓

———— (5)

$\mathrm{A}(1,0),\ \mathrm{P}(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))\to\exists f(\mathrm{AP}^2=f(\cos(\alpha+\beta)))$ $\quad\mathcal{P}\ \mathcal{Q}$

———— (4)

$\uparrow,\ \mathrm{AP}=\mathrm{QR}\quad\to\quad\downarrow$

———— (3)

$\uparrow,\ \mathrm{A}(1,0),\ \mathrm{P}(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta)),\ \mathrm{Q}(\cos\alpha,\ -\sin\alpha),\ \mathrm{R}(\cos\beta,\ \sin\beta)\to\quad\downarrow$

———— (2)

図 1，図 2 → ↓

———— (1)

→ (T1)

図 3：証明図