三角形の五心の発展的考察

2013SE034 東野　亨洋
指導教員: 佐々木　克巳

1　はじめに

本研究の目的は, 三角形の五心とそれに関する図形の性質の証明の理解を深め, 三角形の五心の関係を理解することである. 具体的には, [1]に載っている三角形の五心, オイラー線, 九点円, 垂足三角形, 3つの傍心を頂点とする三角形の性質の証明に, 適宜必要な部分を補うこと, および, それらの性質を発展的に考察することである.

卒業研究では, [1]の三角形の五心の定理, 正三角形の五心の位置関係, 三角形の五心に関する図形の定理の証明に適宜必要な部分を補いながら証明し, 垂足三角形と3つの傍心を頂点とする三角形の性質([1]の p.356 の「LECTURE　三角形の五心の関係」の 3, 4)の証明の発展的考察を行った.

本稿では, このうちの最後の発展的考察を示す. 2 節で[1]で証明されている性質を紹介し, 3 節でそれを発展的に考察する.

2　三角形の五心の関係

この節では, 本研究の考察のもとになった, 2つの定理を紹介する.

定理 2.1. 三角形の内心は, 3つの傍心を頂点とする三角形の垂心である.

証明は, 図 2.1 を用いて行う.

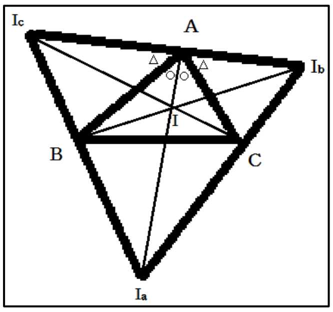

図 2.1　三角形と3つの傍心を頂点とする三角形

定義 2.1. 三角形の1つの頂点 A からその対辺またはその延長上に下ろした垂線の足を, A から下ろした垂線の足という. 三角形の3つの頂点から下ろした垂線の足を3頂点とする三角形ができるとき, その三角形をもとの三角形の垂足三角形という.

定理 2.2.

(1)鋭角三角形の垂心は, 垂足三角形の内心である.

(2)鈍角三角形の垂心は, 垂足三角形の傍心である.

証明は, 図 2.2, 図 2.3 を用いて行う.

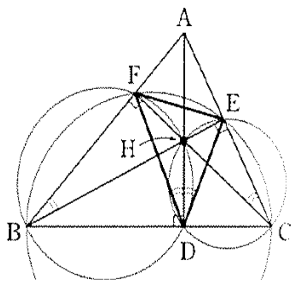

図 2.2　鋭角三角形とその垂足三角形(出典[1])

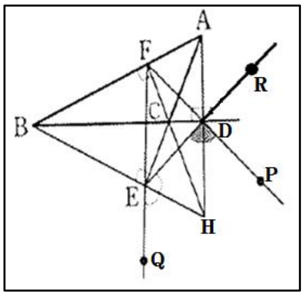

図 2.3　鈍角三角形とその垂足三角形([1]の一部の記号を変更)

3　発展的考察

この節では, 前節の2つの定理を, 発展的に考察する.

まず, 定理 2.1 の証明から次の系 3.1 が成り立つ.

定義 3.1. △ABC の3つの傍心のうち, ∠A の内角の二等分線上にあるものを, A に対する傍心という.

系 3.1. △ABC の内心を I とし, A, B, C に対する傍心を, それぞれ, I_a, I_b, I_cとするとき,

(1)I は$\triangle I_aI_bI_c$の垂心である.

(2)A, B, C は, それぞれ, $\triangle I_aI_bI_c$のI_a, I_b, I_cから下ろした垂線の足である(すなわち, △ABC は$\triangle I_aI_bI_c$の垂足三角形である).

定理 2.2 の(1)と(2)も上の形で考えると, 次が成り立つことが分かった.

定理 3.2. 鋭角三角形 ABC の垂心を H とし, A, B, C から下ろした垂線の足を, それぞれ, D, E, F とするとき,

(1)H は△DEF の内心である.

(2)A, B, C は, それぞれ, △DEF の D, E, F に対する傍心である.

定理 3.3. ∠C > 90°の鈍角三角形 ABC の垂心を H とし, 垂線の足を D, E, F とするとき,

(1)A, B, H は, それぞれ, △DEF の D, E, F に対する傍心である.

(2)C は△DEF の内心である.

これらは, 以下の系 3.5, 系 3.6 のように, 同値の形でも整理できる. そのために, 次の定理 3.4 も必要になる.

定理 3.4. △ABC の内心をIとし, 3つの傍心をI_a, I_b, I_cと

するとき,

(1)$\triangle I_aI_bI_c$は鋭角三角形である.

(2)$\triangle I_aI_bI$, $\triangle I_bI_cI$, $\triangle I_cI_aI$はどれも鈍角三角形である.

系 3.5. 次の2条件は同値である.

(1)△ABC の傍心が D, E, F である.

(2)△DEF が鋭角三角形で, その垂足三角形は△ABC である.

系 3.6. 次の3条件は同値である.

(1)△ABC の内心が I, 傍心が D, E, F である.

(2)△DEF が鋭角三角形で, その垂心が I で, その垂足三角形は△ABC である.

(3)△DEI が$\angle I > 90°$の鈍角三角形で, その垂心が F で, その垂足三角形は△ABC である.

なお, 定理 3.2 と定理 3.3 を直角三角形の場合で考えると, 次の定理が成り立つ. このことは, 上の系 3.6 に整合している.

定理 3.7. $\angle C = 90°$の直角三角形 ABC の垂心を H とし, A, B, C の垂線の足を, それぞれ, D, E, F とするとき, H, D, E が一致し, 3つの垂線の足を3頂点とする三角形はできない.

以下, 上の定理と系を証明する.

系 3.1 の証明. (1)は, 定理 2.1 そのものである.

(2)は, 定理 2.1 の証明に現れる.

定理 3.2 の証明. (1)は定理 2.2(1)そのものである.

(2)を図 2.2 を用いて示す. 定理 2.2 より,

$$\angle FDA = \angle ADE$$

$\angle ADB = \angle ADC = 90°$であるから,

$$\angle FDB = \angle EDC$$

対頂角より, 向かい合った角は等しいので, 直線 BC は△DEF の∠D の外角の二等分線である.

同様に, 直線 CA, AB はそれぞれ, △DEF の∠E, ∠F の外角の二等分線である.

したがって, A, B, C は, それぞれ, △DEF の D, E, F に対する傍心である.

定理 3.3 の証明. (1)の H の性質は定理 2.3(2)そのものである. また, (1)の A, B の性質は, H と同様に示される.

(2)を図 2.3 を用いて示す. 定理 2.2(2)より, H が△DEF の F に対する傍心であるから, FH は∠F の内角の二等分線である.

四角形 CEHD において, $\angle CEH = \angle CDH = 90°$より, 4点 C, E, H, D は CH を直径とする円周上にあるから,

$$\angle CED = \angle CHD \tag{2.1}$$

四角形 AFEH において, $\angle AFH = \angle AEH = 90°$より, 4点 A, F, E, H は AH を直径とする円周上にあるから,

$$\angle FHA = \angle FEA \tag{2.2}$$

(2.1), (2.2)より,

$$\angle FHA = \angle CED$$

よって, EC は△DEF の∠E の内角の二等分線である.

したがって, C は△DEF の内心である.

定理 3.4 の証明. 図 2.1 を用いて示す.

(1)△ABC において,

$$\frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) = 90°$$

また, △IAC において,

$$\angle IAC + \angle ICA + \angle AIC = 180°$$

よって,

$$\angle AIC = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 90° + \frac{1}{2}\angle B$$

よって,

$$\angle AIC > 90° \tag{1.1}$$

定理 2.1 より,

$$\angle IAI_b = \angle ICI_b = 90°$$

であるから, 4点 A, I, C, I_bはII_bを直径とする円の周上にある. よって,

$$\angle AIC + \angle AI_bC = 180° \tag{1.2}$$

(1.1), (1.2)より,

$$\angle AI_bC < 90°$$

つまり, $\angle I_aI_bI_c$は鋭角である.

同様に, $\angle I_bI_aI_c$, $\angle I_aI_cI_b$も鋭角と示される.

したがって, $\triangle I_aI_bI_c$は鋭角三角形である.

(2)(1.1)より, その対頂角は,

$$\angle I_cII_a > 90°$$

よって, $\triangle I_cI_aI$は鈍角三角形である.

同様に, $\triangle I_aI_bI$, $\triangle I_bI_cI$も鈍角三角形と示される.

系 3.5 の証明. △ABC の傍心が D, E, F であるとする. すると, 定理 3.4(1)より, △DEF は鋭角三角形である. また, 系 3.1 より, △ABC は△DEF の垂足三角形である.

逆に, △DEF が鋭角三角形で, その垂足三角形が, △ABC であるとする. すると, 定理 3.2 より, △ABC の傍心が D, E, F である.

系 3.6 の証明. 「(1)⇒(2)」は, 系 3.1 と定理 3.4 と同様に示される. 「(2)⇒(1)」は, 定理 3.2 と同様に示される. 「(1)⇒(3)」は, 定理 3.4(2)と定理 2.2 と同様に示される. 「(3)⇒(1)」は, 定理 2.2(2)と同様に示される.

参考文献

[1] チャート研究所,『新課程 チャート式 数学Ⅰ＋A』, 数研出版, 東京, 平成25年