What-if-not strategy による発展的教材の研究
―相似の問題を中心として―

2013SE030 長谷川 潤
指導教員：佐々木 克巳

1. はじめに

本研究の目的は，中学校数学の相似の問題を発展的に考察することで，それらの問題をより高次なレベルから理解し，発展的な教材の作成に役立てることである．問題を発展的に考察する手法として，what-if-not strategy を用いる．

What-if-not strategy とは，一つの問題に対して“もしそうでなかったら”を考えることによって，問題の理解を深める方法である([2])．本研究では，この手法を，より広い範囲で，すなわち，「問題の一部(仮定だけでなく，結論でも他の部分でもよい)を変更するとどうなるかを考える」という意味で解釈して適用する．

相似の分野を扱う理由は，私自身が中学生時代にこの分野が苦手であったことである．

本研究では，具体的な 3 つの問題の発展的な考察と教材作成を行ったが，本稿では，そのうちの 1 つを取り上げ，それを発展的に考察する．.

2. 発展的考察の例

この節では相似の分野の中から，中点連結定理の問題を取り上げ，考察した結果を示す．

まず，対象とする問題を示す．

問題 1(出典[1])．図 1 に示す．

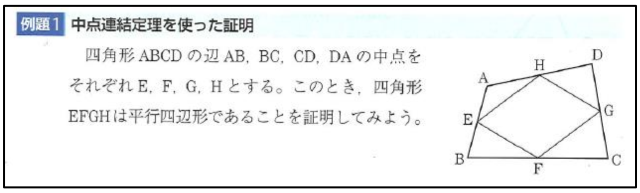

例題1 中点連結定理を使った証明
四角形ABCDの辺AB, BC, CD, DAの中点をそれぞれE, F, G, Hとする。このとき，四角形EFGHは平行四辺形であることを証明してみよう。

図 1:問題 1 の図

以下，この問題を what-if-not strategy を用いて考察する．すなわち，問題の一部を変更し，その結果，何が導かれるかを考察する．

考察 1. 四角形 ABCD の形を制限する．

(1)正方形で考える．

・正方形にすると図 2 のようになる．

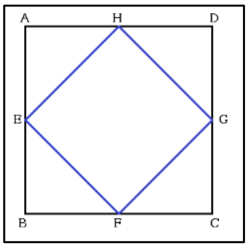


図 2:正方形の場合の図

・対角線 AC または対角線 BD を 1 本引くことで，中点連結定理より，四角形 EFGH は平行四辺形であるとわかる．

・四角形 EFGH の対角線は直角に交わり，かつ，同じ長さであるということから，四角形 EFGH は正方形であるとわかる．

(2)長方形で考える．

・長方形にすると図 3 のようになる．

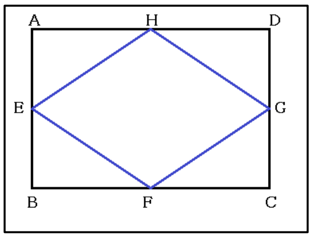


図 3:長方形の場合の図

・対角線を 1 本引くことで，，四角形 EFGH は平行四辺形であるとわかる．

・対角線 AC と対角線 BD を 2 本引くことで，AC = BD と中点連結定理より，

$$EF = FG = GH = HE$$

となることから，四角形 EFGH はひし形であるとわかる．

(3)ひし形で考える．

・ひし形にすると図 4 のようになる．

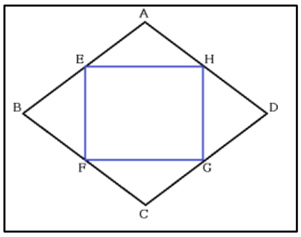


図 4:ひし形の場合の図

・対角線を 1 本引くことで，四角形 EFGH は平行四辺形であるとわかる．

・対角線 AC と対角線 BD を 2 本引くことで，AC ⊥ BD と中点連結定理より，

$$EF = HG,\ EH = FG,\ EF // HG,\ EH // FG,\ EF \perp EH$$

となることから，四角形 EFGH は長方形であるとわかる．

(4)平行四辺形で考える．

・平行四辺形にすると図 5 のようになる．

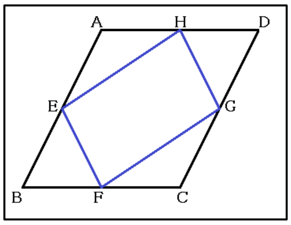


図 5:平行四辺形の場合の図

・対角線 1 本引くことで，四角形 EFGH は平行四辺形であるとわかる．

(5)ブーメラン形で考える．

・ブーメラン形にすると図 6 のようになる．

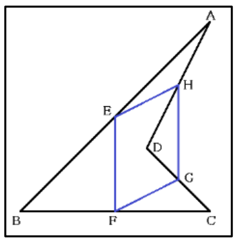


図 6:ブーメラン形の場合の図

・対角線を 1 本引くことで，四

角形 EFGH は平行四辺形であるとわかる.

考察 2. 中点ではなく，辺の内分点で四角形を作る.

(1)辺 AB，辺 BC，辺 CD，辺 DA を同じ比で分ける.

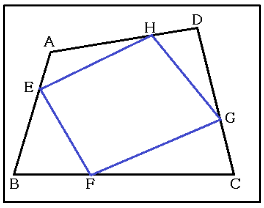


図 7：同じ比で分けた図

・一つの例として，辺を$1:2$で分けると図 7 のようになる.

・今回の場合，対角線で分けると，三角形の左右の辺の比が等しくないので四角形 EFGH は特定の形にならないことがわかる.

(2)対角線を軸にして，対象に辺の比をとって分ける.

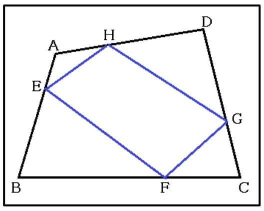


図 8：対角線を軸に比で分けた図

・一つの例として，$1:2$の比で分けると図 8 のようになる.

・$1:2$ の比で分けたとき，比と平行線の定理を用いて平行四辺形ができる.

・$m:n$ の比で分けたときも，同様に，対角線を軸にして対称にすることで平行四辺形を作ることができる.

考察 3. 四角形でなく，三角形で考える.

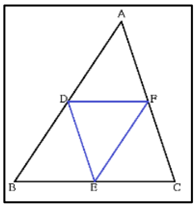


図 9：三角形の場合の図

・三角形にすると図 9 のようになる.

・中点連結定理より,

$DE=\frac{1}{2}AC,\ EF=\frac{1}{2}BA,\ DF=\frac{1}{2}BC$

となるので,

$$\triangle ADF \equiv \triangle DBE \equiv \triangle FEC \equiv \triangle EFD$$

がわかる.

・$\triangle ABC \backsim \triangle ADF$も 3 組の辺の比がすべて等しいためわかる.

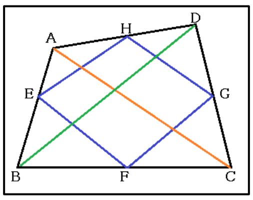


図 10：補助線を引いた図

考察 4. 面積について考える.

・図 1 に対角線 AC，BD を引くと図 10 になる.

・平行四辺形 EFGH は四角形 ABCD の面積の$\frac{1}{2}$になる.

[証明]

△ABD について，考察 2.3 より,

$$\triangle AEH=\frac{1}{4}\triangle ABD \qquad (*5)$$

同様に△CBD，△DAC，△BAC についても考察 2.3 を用いて,

$$\triangle CFG=\frac{1}{4}\triangle CBD,\ \triangle DHG=\frac{1}{4}\triangle DAC,\ \triangle BEF=\frac{1}{4}\triangle BAC \qquad (*6)$$

$(*5)$，$(*6)$より，4 隅の三角形の面積の総和が四角形 ABCD の面積の$\frac{1}{2}$になる．よって，平行四辺形 EFGH の面積は四角形 ABCD の面積の $\frac{1}{2}$ になる.

[証明終わり]

考察のまとめ.

・もとの四角形とその四角形の各辺の中点を結んでできる四角形には次の表 1 の関係があるとわかる.

表 1

もとの四角形	新しい四角形
対角線の長さが等しい	ひし形
対角線が直交する	長方形

・この関係より，図 11，図 12 のように，対角線の長さが等しい四角形である等脚台形からはひし形が，対角線が直交する四角形である凧形からは長方形ができることがわかる.

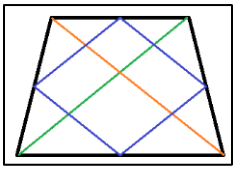


図 11：等脚台形の図

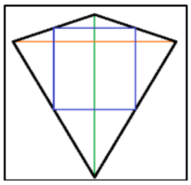


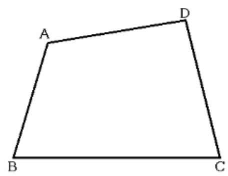
図 12：凧形の図

・考察 3，4 より，先に三角形の中点について考えさせてから四角形の面積の問題に入ると考えやすく，理解も深まる.

考察 2 を用いて，発展問題を作る.

[問題]

右の図において，中点をとる以外で，この図形の辺上に点をとり平行四辺形を作るとしたらどのように点をとればよいか.



[解答例]

・$AB:CB=AD:CD=1:2$ に内分する点.

・$AB:CB=AD:CD=3:4$ に内分する点.

参考文献

[1] 澤田 利夫 坂井 裕 ほか 22 名:『中学数学 3』. 教育出版．東京．(2015)

[2] S.I. ブラウン，M.I. ワルター著 平林 一榮監訳:『いかにして問題をつくるか―問題設定の技術』. 東洋館出版．東京．(1990)