和算の問題の反転法による解法

2013SE102 黒宮賢
指導教員：小藤俊幸

1 はじめに

和算とは，17 世紀初頭の日本で誕生した数学のことをいい, この言葉は明治以降から西洋数学の洋算に対しての用語として呼ばれるようになったものである．江戸時代には算学, 算法, 算用などと呼ばれていた. 和算は現代数学とは違い横書きではなく縦書きで漢数字 (一二三･・・) や甲乙丙といった文字を用いた独特の式表示で表されていた．和算史は 1600 年頃から 1850 年頃までの 250 年間程の歴史があり , 時代とともに変化していった数学である [3].

反転法とは,1831 年にドイツの数学者 L.I.Magnus によって発案されたものであり , 任意の点をその点から原点までの距離に反比例する点に移す, という写像変換の一つである [1].

2 反転とは

定円 (反転円) の中心を o, その半径を k とし ,o から引いた直線上の 2 点を P,P_1 とし , 原点 o から点 P までの距離を p,o から点 P_1 までの距離を p' としたとき,

$$p' = \frac{k^2}{p}$$

の距離をもつ点 P_1 を点 P の反点といい,P を P_1 に移すことを反転するという . また，この定円の半径 k のことを反転定数という [2].

$P(x, y)$,$P1(x_1, y_1)$ が定円 $x^2 + y^2 = k^2$ に対して互いに反点となるとき,$OP = r$,$OP1 = r1$, とすると

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{rr_1}{r^2}$$

$p' = \frac{k^2}{p}$ より ,

$$rr_1 = k^2, r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$$

より

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{k^2}{x_1^2 + y_1^2}$$

以上より

$$x = \frac{k^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2}, y = \frac{k^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \qquad (1)$$

また同様に

$$x_1 = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}, y_1 = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2} \qquad (2)$$

以上 (1),(2) の式の関係により ,P の位置が分かっているいるならばそれに対応する反点 P_1 の位置が定まる .

またここから ,P が定円の中心に限りなく近いときは P_1 は無限遠方にあり ,P が定円の中心から離れていくにつれて P_1 と近づいていき,P が定円上にきたときに P は P_1 と一致することがわかる [2].

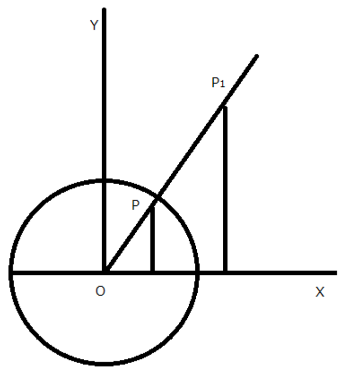


図 1 反転図

3 反転基本式

このセクションでは問題を解くにあたって重要な定理についてふれていく .

原点を通らない円は原点を通らない円に反転される . ただし , それらの円の中心を通る直線は原点を通る . 反転する前の円の半径を r, 反転した後の半径を r', 原点から反転した後の円への接線の長さを t' とすると

$$r = \frac{k^2}{t'^2} r'$$

が成り立つ. これを基本式とする [1].

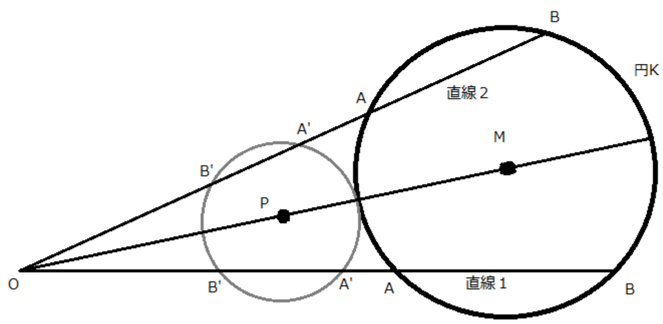


図 2 反転図

中心が M, 半径 r の円 k をおく .O を通る任意の直線1と円 k の交点を A,B また点 A,B を反転した点を A',B' とする .O から A,B,A',B' の各点までの長さを a,b,a',b' とすると定義より

$$aa' = k^2, bb' = k^2$$

また O から円 k に引いた接線の長さを t とすると , 方べき

の定理より

$$\frac{a'}{b} = \frac{b'}{a} = \frac{bb'}{ab} = \frac{k^2}{t^2} = \text{一定}$$

A' を通り直線 BM に平行な直線は OM と交わる点を P として $OM = m, OP = p, MB = r,\ PA' = r'$ とすると, $\triangle OPA' \backsim \triangle OMB$ の関係から

$$\frac{p}{m} = \frac{a'}{b} = \frac{r'}{r} = \frac{k^2}{t^2}$$

より

$$p = \frac{k^2}{t^2}m = \text{一定}$$

$$r' = \frac{k^2}{t^2}r = \text{一定}$$

以上のことにより円 k の反転像は中心が P, 半径が r' の円になることがわかる.

また, 反転された円への接線の長さを t' とすると, 定義より $tt' = k^2$ より

$$r = \frac{t^2}{k^2}r' = \left(\frac{k^2}{t'}\right)^2 \frac{1}{k^2}r' = \frac{k^2}{t'^2}r'$$

となる.

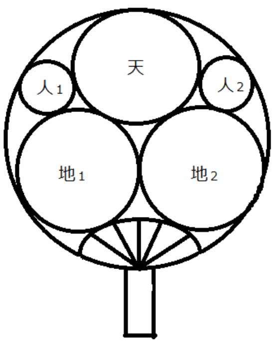
4 和算での反転法

以下の問題の反転定数 k は $k = 1$ とする.

問題

「今有如図団扇, 内容天円一個, 地人円各二個, 団扇径若干, 天円径若干, 問得人円径術如何」

団扇 (外円) の中に, 天円1 個, 人円2 個, 地円2 個を図のようにいれる. 団扇と天円の直径が分かっているとき, 人円の直径を求めよ [1].



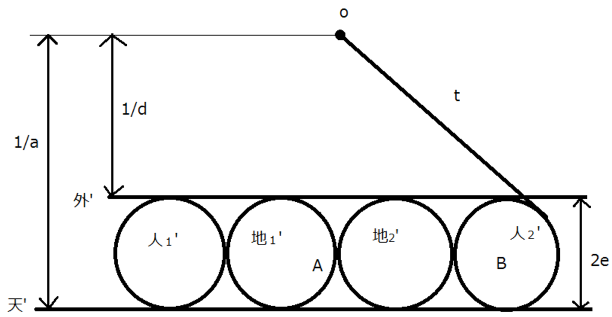
解答

分かっている外円の直径を d, 天円の直径を a として問題を解いていく.

外円と天円の接点を O とし, 点 O で反転する.

反転図より外' と天' の平行線の間隔を $2e$ とすると,

$$2e = \frac{1}{a} - \frac{1}{d} \tag{3}$$



A を 地$'_1$ と 地$'_2$ の接点とすると, A は外' と天' の中央にあるので,

$$OA = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d}\right)$$

人$'_2$ の中心を B とすると

$$AB = 3e = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d}\right)$$

三平方の定理より,

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d}\right)^2 + \frac{9}{4}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d}\right)^2$$

点 O と, 点 O から 人$'_2$ に引いた接線と 人$'_2$ 円直径の交点の距離を t とする.

この t の長さは三平方の定理より,

$$t^2 = OB^2 - e^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d}\right)^2 + \frac{9}{4}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d}\right)^2 = \frac{9}{4}\frac{1}{a^2} - \frac{7}{2}\frac{1}{ad} + \frac{9}{4}\frac{1}{d^2} \tag{4}$$

求める人円の直径を x とすると反転基本式を用いて (3), (4) を代入すると,

$$x = \frac{2e}{t^2} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{d}}{\frac{9}{4}\frac{1}{a^2} - \frac{7}{2}\frac{1}{ad} + \frac{9}{4}\frac{1}{d^2}} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{d}}{\frac{9}{4}(\frac{1}{a} - \frac{1}{d})^2 + \frac{1}{ad}} = \frac{1}{\frac{9}{4}(\frac{1}{a} - \frac{1}{d}) + \frac{\frac{1}{ad}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{d}}}$$

よって人円の直径は,

$$x = \frac{ad}{\frac{9}{4}(d-a) + \frac{ad}{d-a}}$$

となる.

5 おわりに

一見して難解な図形の問題も反転法を用いることにより, 考えやすくなるといえることを感じられた.

参考文献

[1] 田部井勝稲· 松本登志雄:『高校数学で解く日本の図形問題 反転法と算変法』一粒書房, 愛知,2014

[2] 坂井英太郎:『解析幾何学』共立社発行, 東京

[3] 鈴木武雄:『和算の成立ーその光と陰』恒星社厚生閣, 東京,2004