# アナログ式のプラニメーターについて

2013SE046 今村大

指導教員：小藤俊幸

## 1 はじめに

今から少し昔, 地図上で特定の地域の面積を求めたり実験データのパラメータの面積を求めるために用いられていた求積器プラニメーターというものがある．世界で始めて発明されたプラニメーターは 1814 年にドイツの J.H ヘルマンによって作られたものである. その後に様々な改良を経て 19 世紀の中ごろにスイスの J. アムスラーが実用的なものとした．現在は精度が悪いとされて使用されておらず, 使用されているプラニメーターはディジタル式が主流となっているが今回はアナログ式のプラニメーターを研究対象とした．今回対象となるアナログ式のプラニメーターは平面の図形をなぞることで, その図形の面積を計測することができる装置である．今回はその使用法や原理を理解した上で実際に円の面積を測量することで当時の数学者の追体験をすることで彼らの試行錯誤を感じ取ることを研究の目標とする.

## 2 プラニメーターの使用法

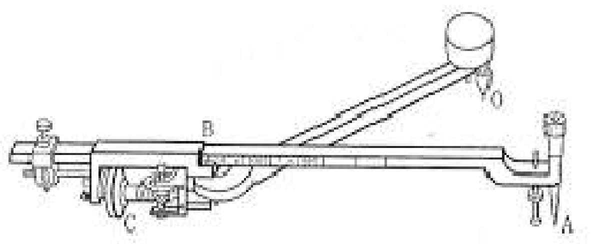


図 1 プラニメーター

図 1 は一般的なアナログ式のプラニメーターである．図 1 の O 点は極といわれる測定時の不動点である．図の左端のネジを回して AB の長さをある程度調整して, その後 B の下に小さな定規が取り付けられているため左端のネジの下に取り付けられたネジで AB の長さを微調整する. この AB の長さは, 縮尺率をプラニメーターの基準である 1:1000 にするためプラニメーターによって決められている. 今回使用するプラニメーターは 181.9cm であるためその値に調整する．C のメモリを 0 に合わせてから A を測定する図の線上に置く．A を閉曲線上をなぞらせてから再び A が始点に戻るまでなぞらせる．そうすることで C の動輪が回転して,C のメモリが値を示す．これを何度か繰り返し平均を取ることで面積を求めることができる．極を置く位置は A が測定図面を不自由なく移動できる点なら基本どこでもよいが, 一般的に極を閉曲線内をおいて計測した場合精度が悪くなるため基本的に極は閉曲線内において計測する．また面積の大きい図面を測定する場合は小さく区分して測定する.

## 3 プラニメータの仕組み

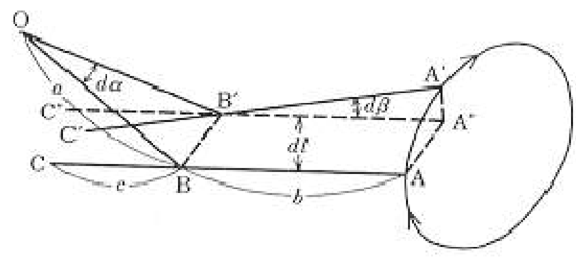


図 2 システムの構成

図 2 の O,A,B は図 1 と同様である．また, ∠ BOB'=d α, ∠ A"B'A'=d β,AB//A"B',OB=a,AB=b,BC=c,AB と A"B' の間の距離を dl とする．初期状態のプラニメーターの状態が OBA とする．この状態から点 A を閉曲線上に滑らせていき, OB'A" を経て OB'A' にごくわずかに移動したとする．この時 C は C' にいたるまで動輪は回転する．動輪は AB に垂直な方向に回転するように取り付けられているため, この回転量を n とすると,n は AB に垂直な方向のみで考える．C' から C" 間の回転量は c*d βであるので,

$$n = dl - c * d\,β \tag{1}$$

となる.OBA から OB'A' に移動するとき OBA が描く面積 S は $dS = \triangle OBB' + \triangle B'A''A' + \square BAA''B'$ より

$$dS \quad \frac{1}{2}a^2 d\,α + \frac{1}{2}b^2 d\,β + bdl \tag{2}$$

となる．(1) を移項して,dl=n+c*d β, この式を (2) に代入すると,

$$dS = \frac{1}{2}a^2 d\,α + (\frac{1}{2}b^2 + bc) * d\,β + bn \tag{3}$$

この式を閉曲線に沿って積分すると

$$S = \frac{1}{2}a^2 \int d\,α + (\frac{1}{2}b^2 + bc) * \int d\,β + b \int n \tag{4}$$

となる.

(i) 極 O が閉曲線外にある場合は, A は始点から変位した後, 再び始点に戻るため∫ d α=0, ∫ d β=0 となる．動輪の半径を r, 動輪の回転数を N とすると,

$$S = b \int n = b * 2\,π\,rN \tag{5}$$

となる.2 π rb は定数なので回転数を求めることで面積を求めることができる. 一般のプラニメーターでは 2 π $rb =$ 100 になるように設定してある.

(ii) 極 O が閉曲線内にある場合は,A が始点からその位置に戻るまで極 O を一周するため, ∫ d α=2 π, ∫ d β=2 πとなる. よって,

$$S = \pi\ (a^2 + b^2 + 2bc) + b * 2\ \pi\ rN \tag{6}$$

となる. π $(a^2 + b^2 + 2bc)$ は零円と呼ばれる定数である. 零円の大きさはあらかじめ求めておかなければならない. 零円は S0 とする. ∠ OCA が直角になるとき斜辺 OA を半径とする円が描けるため,

$$(OA)^2 = (a^2 - c^2) + (b + c)^2 = a^2 + b^2 + 2bc \tag{7}$$

となり AB の長さ (縮尺) が決まれば円の面積は定まる.

つまり, 閉曲線の囲む面積は N によって与えられる 2 π rbN を S0 に加えることによって求められる. 零円の大きさは一般のプラニメーターで縮尺 1:1000 の時おおよそ $2000cm^2$ である. ただし一般的に極は閉曲線外において用いるため今回の実験にて使われる原理は (i) である.

## 4 実験結果

実際にプラニメーターを使用し実験を行う. 計測は複数回を行い平均を取って面積を求める. 実験は求められた値と実際の値で差が少ない場合成功とする.

今回使用するプラニメーターの縮尺 1:1000 は 181.9cm であるため腕の長さを調節する.

まず計測するのは閉曲線は半径 5cm の円とする.

表 1 測定結果

| 測定回数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 値 | 77.9 | 79.1 | 80 | 78.2 | 75.1 |

| 測定回数 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 値 | 78 | 79.1 | 81 | 77.9 | 78.9 |

10 回ほど試行したこの様な結果となった. 1 回あたりの平均を求めると 78.52 となった.

半径 5cm の円の面積は $5 * 5 * 3.14 = 78.5$ より円の面積は約 $78.5cm^2$ である. メモリの値の平均値は 78.52 であるため実験は成功である.

次は図 3 の図形を計測してみる.

すると表 2 のような結果が出た. この図形の面積は 5*5 の正方形の面積 2 つ分と等しいため面積は $50cm^2$ である. 一回あたりの平均は 49.15 となった. 値に差は見られたものの試行回数を増やせば 50 に近づくであろう.

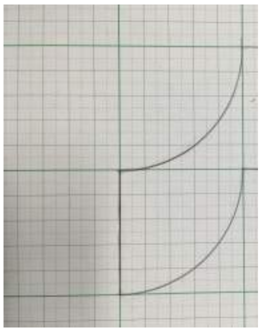

図 3

表 2 測定結果

| 測定回数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 値 | 48 | 46.9 | 48 | 47.8 | 52.9 |

| 測定回数 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 値 | 51.2 | 49.1 | 48.9 | 50.2 | 48.5 |

## 5 おわりに

今回取り扱ったアナログ式プラニメーターは, 現在使用されるディジタル式プラニメーターと比較すると精度が悪いため現在はほとんど使用されておらず, 販売されていない. 今回取り扱ったプラニメーターには説明書が付随しておらず使用法から調べることとなった. しかし, そもそも存在する文献が少なくプラニメーターに関する情報すら少ないため使用法やその仕組みに関する書籍が県内に一冊あるのみであった. しかし、その仕組みについて学んでいくとどこのパーツがどのような働きをするかが少しずつ理解することができた. まずは簡単な計算で面積を求めることのできる図形を測定し実際に測定が正しいことを確認した後、計算では求めることのできない図形の面積を測定した. 今回の研究を通して当時アナログ式プラニメーターを使用していた彼らの苦労を知ることができた. アナログ式プラニメーターは計測値にズレが発生してしまうため正確な数字を測るためには何回も計測を繰り返さねばならず、また一回の計測でもできるだけ正確に線上をなぞらなければならないため計測には忍耐が必要であることがわかった.

## 6 参考文献

[1] 奥山洋士『中学校 高等学校数学科教育課程開発に関する研究 (11)』筑波大学数学教育学研究室,p177-190,2004

[2] 奥山洋士『積分の誕生から現在の求積法』http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/Forall/project/history/2003/planimete

[3] 水野善右ヱ門・三木久夫:『基礎物理学実験』. 培風館, 1988.

[4] 日本船舶海洋工学会関西支部 造船資料保存委員会『調和解析器調査会報告書』