反転法の解析幾何学的考察

2013SE032 橋口高明

指導教員：小藤俊幸

1 はじめに

座標平面上の点を向きが同じで原点からの距離が元の点の距離の逆数に比例するような点に対応させる変換を反転という．反転を利用して様々な図形の性質を調べる手法を総称して反転法という．

反転法は特に複数の円や球が内接している問題を解く際に絶大な力を発揮する．しかし，どのような問題でもその力を発揮するかいえば, 必ずしもそうではなく，簡単な図形や反転してもあまり変わらない図形では反転法を利用する意味がなくなってしまうこともあり，初等幾何で解く方が簡単に解ける場合も多い．

本研究では，反転法の解析幾何学的考察をし，実際に解析幾何を用いて問題を解いてみたいと思う．

2 反点と反形について

2.1 反点と反形とは

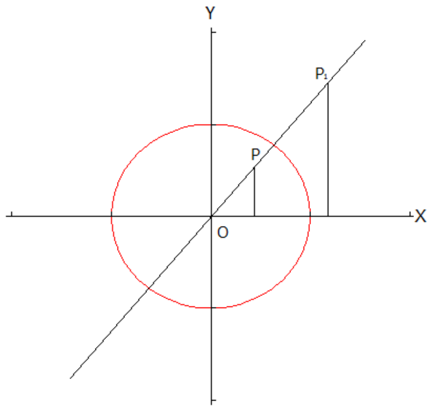

図 1

定円の中心を O，その半径を k とする．O から引かれる直線上の 2 点 P，P_1 の間に $\overline{OP}\ \overline{OP_1} = k^2$ という関係があるとき，P，P_1 はこの円に関して反点であるという [1]．また，このときの定円の半径 k を反転定数という [2]．

$P(x, y)$，$P_1(x_1, y_1)$ が定円 $x^2 + y^2 = k^2$ に関して互いに反点であるとき，$OP = r$，$OP_1 = r_1$ と置くと，

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{rr_1}{r_1^2}$$

が成り立つ (図 1 参照)．
$rr_1 = k^2$，$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$ より，

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{k^2}{x_1^2 + y_1^2}$$

よって，

$$x = \frac{k^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2},\ y = \frac{k^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \tag{1}$$

同様にして，

$$x_1 = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2},\ y_1 = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2} \tag{2}$$

(1) と (2) は x, y と x_1，y_1 の関係を表す式である．これによって，ある点 P の位置から対応する反点 P_1 の位置を求めることができる．

P が円の中心に限りなく近いとき，P_1 は円の中心から限りなく遠くなり，P が円の内側にあるとき P_1 は円の外側にあり，P が円に近づくにつれて P_1 も円に近づく．また，P が円の上にあるとき，P_1 と一致する．

また，P が一つの曲線を描くとき，P_1 は他の曲線を描き，P_1 の描く曲線を定円に関して P の描く曲線の反形といい，定円の中心を反形の中心という [2]．

2.2 直線の反形

直線 $ax + by + c = 0$ の定円 $x^2 + y^2 = k^2$ に関する反形の方程式は，(1) により，

$$\frac{ak^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{bk^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} + c = 0$$

すなわち，

$$c(x_1^2 + y_1^2) + k^2(ax_1 + by_1) = 0$$

が成り立つ．

したがって，$c \neq 0$ のとき，すなわち原点を通過しない直線の反形は原点を通過する円となり，$c = 0$ のとき，すなわち原点を通過する直線の反形は元の直線と同じ直線になる．

2.3 円の反形

円 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0(f, g$ は実数) の定円 $x^2 + y^2 = k^2$ に関する反形の方程式は，(1) より，

$$\frac{k^4 x_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} + \frac{k^4 y_1^2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} + \frac{2gk^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{2fk^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} + c = 0$$

すなわち，

$$c(x_1^2 + y_1^2) + 2gk^2 x_1 + 2fk^2 y_1 + k^4 = 0$$

が成り立つ．

したがって，$c \neq 0$ のとき，すなわち原点を通過しない円の反形は円となり，$c = 0$ のとき，すなわち原点を通過する円の反形は直線となる．

3　適用例

次に実際に参考文献 [2] に載っている問題を解析幾何で解いてみる．

問題　図 2 元図のように半径 R の大円 2 個とそれに接する直線との間に小円を逐次入れていく．最初の小円を第 1 円とするとき n 番目の小円の半径 r_n を求めよ．

解答　図 2 元図のように 2 つの大円の接する点を原点 O とし，$A = (2R, 0)$ とおく．

反転定数を 1 とし，原点を中心とする円に関して反転すると，大円 1 と大円 2 は原点を通らない直線になり，小円はすべて原点を通らない円になり，直線は原点を通る円になる．また，反転しても各図形が接している図形は変わらないので，図 3 反転図のようになる．

そこで，(2) より，A' の座標は $\left(\dfrac{1}{2R}, 0\right)$ となる．

よって，小' 円の半径は $\dfrac{1}{2R}$ となる．

また，小' 円 n の y 軸との交点のうち，x 軸側の点の座標は $\left(0, -\dfrac{n-1}{R}\right)$，$x$ 軸と遠い方の点は $\left(0, -\dfrac{n}{R}\right)$ と表される．

(1) より，図 4 小円 n 拡大図のように小円 n の y 軸との交点のうち，x 軸側の点の座標は $\left(0, -\dfrac{R}{n}\right)$，$x$ 軸と遠い方の点は $\left(0, -\dfrac{R}{n-1}\right)$ と表される．

よって，

$$r_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{R}{n} + \frac{R}{n-1}\right)$$

となり , 計算すると，

$$r_n = \frac{R}{2n(n-1)}$$

となる．

これは，参考文献 [2] に載っている答えと一致している．

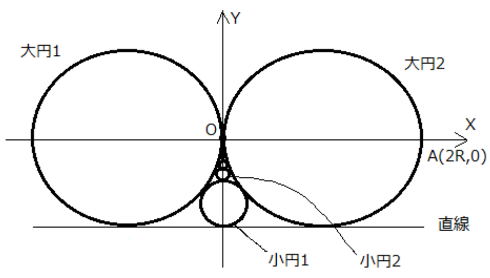

図 2　:元図

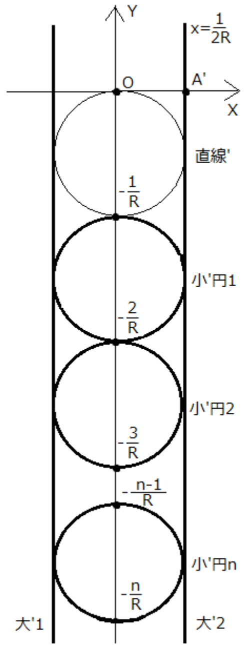

図 3　:反転図

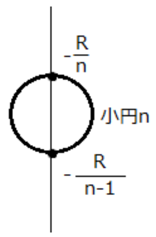

図 4　:小円 n 拡大図

4　おわりに

参考文献 [2] に載っている反転基本式など，反転法には定理がいくつかある．最初はその定理を解析幾何を用いて証明し，使おうとしていた．しかし，どうしてもその証明に対して，解析幾何の有用性が見出せなかった．そこで，私は，解析幾何を用いたら反転法を使う問題を定理をほとんど使わず高校数学のみで解けるのではないか，と考えた。そして，実際に解いてみたら案外あっさりと解けてしまい，驚いた．また，解析幾何の有用性を再確認させられた．そして，本研究を通し，難しい和算の問題なども簡単に解けてしまう反転法についてとても理解が深まった．

参考文献

[1] 坂井英太郎 :『 解析幾何学』
共立社出版，東京，1929

[2] 田部井勝稲，松本登志雄:『 高校数学で解く日本の図形問題　反転法と算変法』
一粒書房，2014

[3] デビッド・ W・ ヘンダーソン, ダイナ・ タイミナ (鈴木治郎 訳):『 体験する幾何学』
ピアソン・ エデュケーション，東京，2010