不確実性をもつ施設配置問題に対するロバスト最適化

2013SE236 和田さよ子

指導教員：福嶋雅夫

1 はじめに

私たちの周りには，さまざまなサービス施設がある．利用者全体に対して最も優れた施設の配置場所を決める問題が施設配置問題である．配置する施設の特性や容量の有無などによって問題はいくつもの種類に分類される．利用者の人数を需要点の重みとして考慮する場合，これらの量は将来的に変動する可能性があるため不確定である．数理計画問題を記述するデータが不確定な場合，大きく分けて，「確率計画法」と「ロバスト最適化」が知られている [4][5]．ロバスト最適化では，不確定なデータの生じる範囲をあらかじめ設定し，そのなかで最悪な状況を想定したモデル化が行なわれる [1][5]．本研究では，施設配置問題の一つである Weber 問題において，需要点の重みである需要量の不確実性を考慮した問題に，ロバスト最適化手法を取り入れた定式化を提案する．

2 準備

2.1 2 次錐計画問題

ベクトル $z \in \mathbb{R}^n$ を $z := (z_0, \bar{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ と表すとき，以下のように定義される集合を n 次元の 2 次錐という．

$$\mathcal{K} = \begin{cases} \{(z_0, \bar{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : z_0 \geq ||\bar{z}||\} & (n \geq 2) \\ \{z \in \mathbb{R} : z \geq 0\} & (n = 1) \end{cases}$$

ただし，$|| \cdot ||$ はユークリッドノルムを表す．**2 次錐計画問題**とは，2 次錐制約と呼ばれる特別な制約条件の下で，目的関数を最小化または最大化する数理計画問題である [2]．

2.2 ロバスト最適化問題の定式化

不確実性集合が楕円体であるときのロバスト最適化問題の定式化について，ロバスト線形計画問題

$$\begin{aligned} \min \quad & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t.} \quad & a^{\mathrm{T}} x \leq b, \quad \forall a \in \mathcal{U} \end{aligned} \tag{1}$$

を例に説明する [1]．不確実性集合を楕円体

$$\mathcal{U} = \{a_0 + Au : \|u\| \leq 1\}$$

としたとき，問題 (1) の制約式は

$$\begin{aligned} \max_{\|u\| \leq 1} (a_0 + Au)^{\mathrm{T}} x &= {a_0}^{\mathrm{T}} x + \max_{\|u\| \leq 1} (A^{\mathrm{T}} x)^{\mathrm{T}} u \\ &= {a_0}^{\mathrm{T}} x + \|A^{\mathrm{T}} x\| \leq b \end{aligned}$$

となるので，問題 (1) は

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t.} \quad & {a_0}^{\mathrm{T}} x + \|A^{\mathrm{T}} x\| \leq b \end{aligned}$$

と書き換えられる．これは 2 次錐計画問題であり，内点法を用いて効率的に解くことができる [1][5]．

3 Weber 問題に対するロバスト最適化

m 個の需要点 $i = 1, 2, \ldots, m$ が平面上に分布しているものとし，それらの座標を $a^i = (a_1^i, a_2^i)^{\mathrm{T}}$ とする．需要点 i は需要量 $w_i > 0$ をもち，目的関数は施設と需要点の間の距離に需要量を乗じたものの和とする．需要点と施設間の距離はユークリッドノルムを用いて計算されるものとする．このとき，Weber 問題は次式で表される [3]．

$$\min_{x \in X} \quad \sum_{i=1}^{m} w_i \|x - a^i\| \tag{2}$$

ここで，新しい変数 $t_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ を導入すると，問題 (2) は次の 2 次錐計画問題として表される．

$$\begin{aligned} \min \ & \sum_{i=1}^{m} w_i t_i \\ \text{s.t.} \ & \|x - a^i\| \leq t_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ & x \in X \end{aligned} \tag{3}$$

いま，各需要点の需要量ベクトル $w = (w_1, w_2, \ldots, w_m)^T$ は次の不確実性集合に含まれると仮定する．

$$\mathcal{U} = \{w^0 + \delta u \mid \|u\| \leq 1\}$$

これは中心 w^0，半径 δ の球である．このとき，ロバスト最適化を適用すると，問題 (3) の目的関数は

$$\begin{aligned} \max_{w \in \mathcal{U}} \ w^{\mathrm{T}} t &= \max_{\|u\| \leq 1} (w^0 + \delta u)^{\mathrm{T}} t \\ &= (w^0)^{\mathrm{T}} t + \delta \max_{\|u\| \leq 1} u^{\mathrm{T}} t \\ &= (w^0)^{\mathrm{T}} t + \delta \|t\| \end{aligned}$$

と書きかえられるので，新たな変数 s を用いて，ロバスト Weber 問題は次のように定式化できる．

$$\begin{aligned} \min \ & (w^0)^{\mathrm{T}} t + \delta s \\ \text{s.t.} \ & \|t\| \leq s \\ & \|x - a^i\| \leq t_i \quad (i = 1, 2, ..., m) \\ & x \in X \end{aligned} \tag{4}$$

これは 2 次錐計画問題であり，2.2 で述べたように，内点法を用いて解くことができる．

4　数値実験

ロバスト Weber 問題 (4) の定式化に対して Python 言語でプログラムを作成し，数理計画ソルバー Gurobi® によって最適解を求めた．

4.1　尾張旭市を対象とした実験

愛知県にある尾張旭市立東中学校区に属する 19 個の町を需要点として実験を行なった．各町の人口を需要量とし，将来的に人口の変動が考えられるため，不確実性を考慮する．図 1, 2 では，人口の多さを円にして対比的に表しており，最適解を星印で示す．

図 1　$\delta = 0$ のとき

図 2　$\delta = 500$ のとき

$\delta = 0$ のとき，最適解は駅周辺の東栄町の位置にほぼ一致した．これは，駅周辺は人口が多く，反対に駅から遠い町は人口が少ないためと考えられる．$\delta = 500$ のとき，$\delta = 0$ のときに比べて最適解は南下している．見方を変えると，19 個の需要点の中央に寄っている．不確実性が大きくなると，駅から遠い町にも人口増加の可能性が大きくなるため，最適解はすべての需要点の中央に近づいていくと考えられる．

4.2　需要点が 3 点のときの実験

需要点を $A = (0,0)$，$B = (1,0)$，$C = (0,1)$ の 3 点とし，需要量の不確実性集合の中心を $w^0 = (w_A, w_B, w_C)$ とする．各需要量 w_A, w_B, w_C と δ の値の変化が最適解 (X, Y) にどのように影響を及ぼすかを観察する．

表 1　実験結果

w_A	w_B	w_C	δ	X	Y
1	1	1	0	0.211	0.211
1	1	1	1	0.280	0.280
1	1	1	10	0.323	0.323
0.9	1	1	0	0.248	0.248
0.9	1	1	1	0.294	0.294
0.9	1	1	10	0.326	0.326
1	1	0.9	0	0.178	0.206
1	1	0.9	1	0.262	0.285
1	1	0.9	10	0.321	0.325

3 つの需要量 w_A, w_B, w_C が等しいとき，点 A の需要量 w_A だけ小さいとき，点 C の需要量 w_C だけ小さいときの，すべての場合において，δ を大きくするにつれて $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ に近づく結果が得られた．つまり最適解は，最適解から各需要点までの距離の 2 乗和が最小となる点（3 点の重心）に近づくことが観測された．

5　おわりに

本研究では，施設配置問題の基本的な問題である Weber 問題において需要量に不確実性が存在するとき，ロバスト最適化の手法を適用することにより，2 次錐計画問題に定式化できることを示した．さらに数値実験を行い，得られた結果に対する考察を行った．楕円体以外の形の不確実性集合を用いたロバスト最適化の検討が今後の課題である．

参考文献

[1] A. Ben-Tal, and A. Nemirovski : Robust convex optimizatoin, Mathmatics of Operations Research, Vol.23, pp.769-805, 1998.

[2] 福田エレン秀美，福島雅夫 : 2 次錐計画と 2 乗スラック変数法, オペレーションズ・リサーチ, Vol.59, No.12, pp.707-715, 2014.

[3] 久保幹雄 : ロジスティクス工学, 経営科学のニューフロンティア 8, 朝倉書店, 2014.

[4] 太田快人, 酒井英昭, 高橋豊, 田中利幸, 永持仁, 福島雅夫［編集］: 数理工学事典, 朝倉書店, 2011.

[5] 武田朗子 : 不確実性下での最適化―ロバスト最適化を中心に―, オペレーションズ・リサーチ, Vol.51, No.7, pp.420-423, 2006.