相補性制約をもつ数理計画問題に対する平滑化乗数法

2013SE227 堤優介

指導教員：福嶋雅夫

1　はじめに

相補性制約をもつ数理計画問題 (MPEC) は，均衡条件によって状態が決まるシステムに対する設計問題や意思決定問題を，より直接的に表現した数理計画問題であり，交通ネットワークの設計問題，競合下にある施設配置問題などのモデル化に用いられている [1]．MPEC は取り扱いの難しい問題であり，通常の非線形計画問題の解法をそのまま適用することは困難である．本研究では，MPEC に対して平滑化乗数法と呼ばれる数値解法を提案し，数値実験によりその有効性を検証する．

2　Leader-Follower ゲームと MPEC

Leader-Follower ゲームとは先手プレイヤー (以後, 先手という) が後手プレイヤー (以後, 後手という) の戦略を予想し，自身の最適化を行うゲームのことである．後手は先手の戦略に対して自らの最適化を行う．このゲームは 2 レベル計画問題とみなすことができる．先手プレイヤーの戦略を $x \in R^n$ とし, 後手の戦略を $y \in R^m$ と表す．f，X をそれぞれ先手の目的関数, 戦略集合とする．g，Y，c を後手の目的関数，戦略集合，制約関数とする．先手は次の数理計画問題を解く．

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{minimize}} & f(x,y) \\ \text{subject to} & x \in X \end{array} \tag{1}$$

後手は先手の戦略 $x \in X$ に対して, 次の問題を解く．

$$\begin{array}{ll} \underset{y}{\text{minimize}} & g(x,y) \\ \text{subject to} & c(x,y) \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{array} \tag{2}$$

先手の戦略 x を固定したとき，後手の問題 (2) は凸計画問題であると仮定する．そのとき，後手の問題の Karush-Kuhn-Tucker 条件を先手の問題の制約条件として扱うことにより，先手の問題 (1) は以下のように表される．

$$\begin{array}{ll} \underset{x,y,z}{\text{minimize}} & f(x,y) \\ \text{subject to} & x \in X \\ & z_i \geq 0,\ c_i(x,y) \geq 0,\ z_i c_i(x,y) = 0 \\ & \qquad\qquad (i = 1, ..., l) \\ & y_j \geq 0\ , \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{l} z_i \frac{\partial c_i(x,y)}{\partial y_j} \geq 0, \\ & y_j \left(\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{l} z_i \frac{\partial c_i(x,y)}{\partial y_j} \right) = 0 \\ & \qquad\qquad (j = 1, ..., m) \end{array} \tag{3}$$

このように，制約条件のなかに相補性条件を含む最適化問題を**相補性制約をもつ数理計画問題 (Mathematical Program with Equilibrium Constraints: MPEC)** という．

3　平滑化 Fischer-Burmeister (FB) 関数

相補性条件

$$a \geq 0, b \geq 0,\ ab = 0 \tag{4}$$

を一つの等式制約に置き換えるために次式で定義される Fischer-Burmeister (FB) 関数がしばしば用いられる．

$$\phi(a,b) := a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$$

FB 関数は以下の性質をもつ．

$$\begin{aligned} &\phi(a,b) = 0 \\ &\Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, ab = 0 \end{aligned}$$

したがって，相補性条件 (4) は方程式 $\phi(a,b) = 0$ と等価である．しかし，$(a,b) = (0,0)$ において ϕ は微分できないので，このまま扱うことは難しい．そこで，平滑化パラメータ $\varepsilon > 0$ を用いて平滑化 FB 関数を次式で定義する．

$$\phi_\varepsilon(a,b) := a + b - \sqrt{a^2 + b^2 + 2\varepsilon}$$

平滑化 FB 関数は次の性質をもつ．

$$\phi_\varepsilon(a,b) = 0 \Leftrightarrow a > 0, b > 0, ab = \varepsilon$$

よって，$\phi_\varepsilon(a,b) = 0$ をみたす (a,b) は相補性条件 (4) を近似的にみたすと考えられる．関数 ϕ_ε はすべての点 $(a,b) \in R^2$ において微分可能である．この関数を MPEC (3) に導入することにより，次の非線形計画問題を得る．

$$\begin{array}{ll} \underset{x,y,z}{\text{minimize}} & f(x,y) \\ \text{subject to} & x \in X \\ & \phi_\varepsilon(z_i, c_i(x,y)) = 0\ (i = 1, ..., l) \\ & \phi_\varepsilon \left(y_j, \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{l} z_i \frac{\partial c_i(x,y)}{\partial y_j} \right) = 0 \\ & \qquad\qquad (j = 1, ..., m) \end{array} \tag{5}$$

この問題は微分可能であり，$\varepsilon > 0$ が十分小さいとき，問題 (5) の最適解は問題 (3) の近似最適解となることが期待される．

4　平滑化乗数法

変数と関数を表す記号を適当に変更することにより，問題 (5) を次のように書き換える．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x,y) \\ \text{subject to} & g_j(x) \le 0 \;\; (j=1,...,q) \\ & \phi_\varepsilon(G_i(x,y),H_i(x,y)) = 0 \;\, (i=1,...,p) \end{array}$$

この問題に対する拡張 Lagrange 関数は次式で定義される．

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon,\rho}(x,y,\lambda,\mu) = f(x,y) &+ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \phi_\varepsilon(G_i(x,y),H_i(x,y)) \\ &+ \frac{\rho}{2}\sum_{i=1}^{p}\phi_\varepsilon(G_i(x,y),H_i(x,y))^2 \\ &+ \frac{1}{2\rho}\sum_{j=1}^{q}\{max\{0,\mu_j+\rho g_j(x)\}^2-\mu_j^2\} \end{aligned}$$

ここで $\rho > 0$ はペナルティパラメータである．提案する平滑化乗数法の計算手順は以下のように記述される．

1. ペナルティパラメータの初期値 $\rho_0 > 0$，更新係数 $0 < c_1 < 1, c_2 > 1$，平滑化パラメータの初期値 $\varepsilon_0 > 0$，許容誤差 $\delta > 0$，最大ステップ数 M_{max} を定め，$k := 0$，$m := 0$ とする，初期点 $(x^0, y^0, \lambda^0, \mu^0)$ を選ぶ．
2. 制約なし最小化問題

   $$\min \quad L_{\varepsilon_m,\rho_k}(x,y,\lambda^k,\mu^k)$$

   の近似解として，(x^{k+1}, y^{k+1}) を求める．
3. 次式で Lagrange 乗数を更新する．

   $$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \rho_k \phi_{\varepsilon_m}(G_i(x^{k+1},y^{k+1}),H_i(x^{k+1},y^{k+1})) \quad (i=1,...,p)$$

   $$\mu_j^{k+1} = \max\{0, \mu_j^k + \rho_k g_j(x^{k+1})\} \;\; (j=1,...,q)$$

4. $m = M_{max}$ ならば，5 へ．そうでなければ，$\varepsilon_{m+1} = c_1\varepsilon_m$ と更新して 2 に戻る．
5. $\sum_{i=1}^{p}|\phi_{\varepsilon_m}(G_i(x^{k+1},y^{k+1}),H_i(x^{k+1},y^{k+1}))| + \sum_{j=1}^{q}|min\{\mu_j^{k+1}, g_j(x^{k+1})\}| < \delta$ ならば，終了．そうでなければ，$\rho_{k+1} = c_2\rho_k$ と更新し，1 に戻る．

5　数値実験

2 つの MPEC の例題 [2] に対して平滑化乗数法とペナルティ法を適用した結果を示す．

$$\begin{array}{ll} \text{問題 1 :min} & x_1^2 + 10(x_2-1)^2 + (y+1)^2 \\ \text{s.t.} & x_2 \ge 0, \;\; x_1 - e^{x_2} - e^y \ge 0, \\ & y \ge 0, \;\; y(x_1 - e^{x_2} - e^y) = 0 \\ & (x_1^*, x_2^*, y^*) = (2.7101, 0.5365, 0) \end{array}$$

ペナルティ法の結果

13 回の反復で，$(x_1,x_2,y) = (2.7087, 0.5361, 0.0003)$ を得た．計算時間は 1.6151 秒で，最終的なペナルティパラメータρ_kの値は 4096 であった．

平滑化乗数法の結果

3 回の反復で，$(x_1,x_2,y) = (2.7096, 0.5365, -0.0002)$ を得た．計算時間は 1.447 秒で，最終的なペナルティパラメータρ_kの値は 4 であった．

$$\begin{array}{ll} \text{問題 2 :min} & x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + x_3^2 + x_4^2 \\ \text{s.t.} & 0 \le x_1 \le 2, \;\; 0 \le x_2 \le 2, \\ & x_3 - x_1 + x_3y_1 - y_1 = 0, \\ & x_4 - x_2 + x_4y_2 - y_2 = 0, \\ & y_1 \ge 0, \;\; y_2 \ge 0, \\ & F(x,y) \ge 0, \;\; y^{\mathrm{T}}F(x,y) = 0, \\ & F(x,y) = [0.25-(x_3-1)^2, 0.25-(x_4-1)^2]^{\mathrm{T}} \\ & (x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*,y_1^*,y_2^*) = (0.5,0.5,0.5,0.5,0,0) \end{array}$$

ペナルティ法の結果

10 回の反復で，$(x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2) = (0.5046, 0.5046, 0.5024, 0.5024, -0.0006, -0.0006)$ を得た．計算時間は 1.6121 秒で，最終的なペナルティパラメータρ_kの値は 512 であった．

平滑化乗数法の結果

4 回の反復で，$(x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2) = 0.5031, 0.5014, 0.5028, 0.5015, 0.0005, 0.0002)$ を得た．計算時間は 2.0631 秒で，最終的なペナルティパラメータρ_kの値は 8 であった．

6　考察

前節の数値例に対し，平滑化乗数法はペナルティ法に比べ，より最適解に近い解が得られることが確かめられた．また，ラグランジュ乗数が適切に更新されれば，ペナルティパラメータ ρ をあまり大きくしなくても最適解が得られることがわかった．

7　おわりに

本研究では，Leader-Follower ゲームを MPEC に再定式化し，平滑化 Fischer-Burmeister 関数を導入して通常の非線形計画問題へ変換することにより，MPEC に対応した平滑化乗数法を提案した．さらに，提案した方法に対する数値実験を行い，その結果に対する考察を行った．先手後手が複数いる問題に対する拡張は今後の課題である．

参考文献

[1] 太田快人・酒井英昭・高橋豊・田中利幸・永持仁・福島雅夫 (編):数理工学辞典，pp. 574-575, 朝倉書店，2011

[2] G.H. Lin and M. Fukushima: New Relaxation Method for Mathematical Programs with Complementarity Constraints, Journal of Optimization Theory and Applications,Vol. 118, pp. 81-116, 2003.