

ベルト駆動の目標値追従形スライディングモード制御

2013SE264 吉川 響太郎 2013SE154 大橋 昌平

指導教員：陳 幹

1 はじめに

本研究で用いられている (ECP-model220) は、ベルトコンベアなどの工作機械、また自動車におけるトランスミッション手法の一つである CVT に実用化されている [1]. ベルト駆動は、DC モータが回転することによって連結されたドライブプリーが回転する. 同様にドライブプリーの回転によってアイドルプリーが回転し、アイドルプリーの回転によってロードプリーが回転するといった仕組みを持つ [2]. ベルト駆動の利点としては、コストが低く、軽量であり、騒音が少なく、潤滑を必要としないことである. またベルト駆動は上記の他にも、エレベータの巻上げや、コンプレッサーなど幅広い機器に用いられている. スライディングモード制御は、システムの状態を切換面に拘束するという他の制御法にはないことや、不確かさを含む系に優れたロバスト性が大きな魅力となっており、適用範囲も広い制御手法である. また、スライディングモード制御は線形系はもちろん非線形系、パラメータ変動系、時変形、未知パラメータや未知外乱を有する系に対しても容易に適用することができ、希望の特性を切換面にして設計すれば、システムは等価的に希望の特性に拘束され適応していくことになる [3]. 本研究の制御目的としては、制御対象であるベルト駆動の出力ギアであるロードプリーを希望とする角度で止める. そしてばね定数の値が不確かさとして考えるが、マッチング条件を満たしていない部分があるので、本研究ではマッチング条件を満たしている部分のみを考慮したスライディングモード制御を設計し、シミュレーションと実験結果で有効性を確認する.

2 モデリング

制御対象のベルト駆動モデルを図 1 に示し、また物理パラメータのばね定数の値 [1] とその他の値 [2] を表 1 に示す.

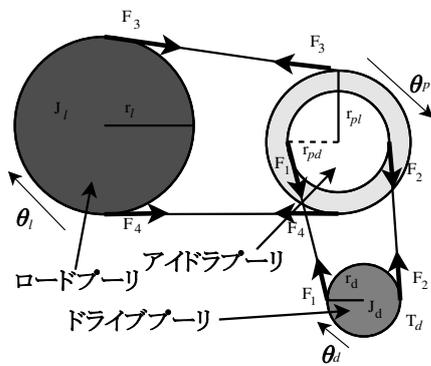


図 1 ベルト駆動モデル

表 1 ベルト駆動物理パラメータ

名称	値	単位
ロードプリーの回転半径	$r_l = 6.0 \times 10^{-2}$	[m]
アイドルプリーがドライブプリーを回転させる回転半径	$r_{pd} = 2.0 \times 10^{-2}$	[m]
アイドルプリーがロードプリーを回転させる回転半径	$r_{pl} = 3.0 \times 10^{-2}$	[m]
ドライブプリーの回転半径	$r_d = 1.0 \times 10^{-2}$	[m]
ドライブプリーの慣性モーメント	$J_d = 4.0 \times 10^{-4}$	[kgm ²]
ロードプリーの慣性モーメント	$J_l = 6.5 \times 10^{-3}$	[kgm ²]
ベルトのばね定数	$k_{pl} = 1000$	[N/m]
ドライブプリー粘性摩擦係数	$c_d = 2.0 \times 10^{-3}$	[Ns/rad]
ロードプリーの粘性摩擦係数	$c_l = 3.8 \times 10^{-2}$	[Ns/rad]
ドライブプリーとロードプリーとのギア比	$gr = 4$	[-]

ドライブプリーの回転角度を θ_d [rad], アイドラプリーの回転角度を θ_p [rad], ロードプリーの回転角度を θ_l [rad], 入力トルクを τ [Nm] と定める. またロードプリーとアイドルプリーの間で働く二つの力をそれぞれ F_3, F_4 とし、ドライブプリーとアイドルプリー間で働く二つの力を F_1, F_2 とし、ドライブプリーの慣性モーメントを J_d [kgm²] とし、アイドルプリーの慣性モーメントを J_p [kgm²] とし、ロードプリーの慣性モーメントを J_l [kgm²] とし、またばね定数を k_{pl} とする [1].

まず、ドライブプリーの運動方程式は

$$J_d \ddot{\theta}_d = \tau + (F_1 - F_2)r_d - c_d \dot{\theta}_d \quad (1)$$

となる.

アイドルプリーの運動方程式は

$$J_p \ddot{\theta}_p = (F_2 - F_1)r_{pd} + (F_4 - F_3)r_{pl} \quad (2)$$

となる.

ロードプリーの運動方程式は

$$J_l \ddot{\theta}_l = (F_3 - F_4)r_l - c_l \dot{\theta}_l \quad (3)$$

となる.

式 (2) を変形すると

$$F_1 - F_2 = \frac{1}{r_{pd}} \{ (F_4 - F_3)r_{pl} - J_p \ddot{\theta}_p \} \quad (4)$$

となる.

式 (1) に式 (4) を代入すると

$$J_d \ddot{\theta}_d = \tau - c_d \dot{\theta}_d + \frac{r_d}{r_{pd}} \{ (F_4 - F_3)r_{pl} - J_p \ddot{\theta}_p \} \quad (5)$$

となる.

アイドルプリーとロードプリーの間の方程式 F_3, F_4 は以下に示す. そして、 F_0 はベルトの初期張力とすると、

$$F_3 = F_0 + k_{pl} \{ r_{pl} \theta_p - r_l \theta_l \} \quad (6)$$

$$F_4 = F_0 - k_{pl}\{r_{pl}\theta_p - r_l\theta_l\} \quad (7)$$

となる。

式 (5) と式 (3) の F_3 と F_4 に、式 (6) と式 (7) をそれぞれ代入すると、それぞれの式は以下のように、

$$J_d\ddot{\theta}_d = \tau(t) - c_d\dot{\theta}_d(t) + \frac{r_d}{r_{pd}}\{-2k_{pl}(r_{pl}\theta_p - r_l\theta_l)r_{pl} - J_p\ddot{\theta}_p\} \quad (8)$$

$$J_l\ddot{\theta}_l = 2k_{pl}(r_{pl}\theta_p - r_l\theta_l)r_l - c_l\dot{\theta}_l \quad (9)$$

となる。

ここで、

$$k \triangleq 2k_{pl}r_l^2 \quad (10)$$

とする。

式 (8) と式 (9) に k を代入すると、

$$J_d\ddot{\theta}_d = \tau - c_d\dot{\theta}_d + \frac{r_d}{r_{pd}}\left\{-\frac{r_{pl}^2}{r_l^2}k\theta_p - \frac{r_{pl}}{r_l}k\theta_l - J_p\ddot{\theta}_p\right\} \quad (11)$$

$$J_l\ddot{\theta}_l = \frac{r_{pl}}{r_l}k\theta_p - k\theta_l - c_l\dot{\theta}_l \quad (12)$$

となる。

ここで、アイドラプーリとロードプーリとのギア比を g'_r 、全体のギア比を g_r とすると、

$$g'_r \triangleq \frac{r_{pd}}{r_d} \quad (13)$$

$$g_r \triangleq g'_r \frac{r_{pd}}{r_r} \quad (14)$$

となる。

式 (11) と式 (12) は以下のように

$$\tau = (J_d + g_r'^{-2}J_p)\ddot{\theta}_d + c_d\dot{\theta}_d + g_r'^{-2}k\theta_d - g_r'^{-1}k\theta_l \quad (15)$$

$$0 = J_l\ddot{\theta}_l + c_l\dot{\theta}_l + k\theta_l - g_r'^{-1}k\theta_d \quad (16)$$

となる。

ここで、

$$J_d^* \triangleq J_d + g_r'^{-2}J_p \quad (17)$$

とする。

そして、式 (17) を式 (15) に用いると、

$$\tau = J_d^*\ddot{\theta}_d + c_d\dot{\theta}_d + g_r'^{-2}k\theta_d - g_r'^{-1}k\theta_l \quad (18)$$

となる [1].

2.1 状態空間表現

ここで本研究で目的である出力を目標値に定常偏差なく追従させるためのサーボ系の導出をするために、目標値 r と制御量 θ_l との差の積分値 z を新たな状態変数として加えた。その状態方程式と状態変数は、

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Q_p r \\ y = Cx \end{cases} \quad (19)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{kg_r'^{-2}}{J_d^*} & -\frac{c_d}{J_d^*} & \frac{kg_r'^{-1}}{J_d^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{kg_r'^{-1}}{J_l} & 0 & -\frac{k}{J_l} & -\frac{c_l}{J_l} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_d^*} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \quad (21)$$

$$Q_p = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (22)$$

$$x = \begin{bmatrix} z \\ \theta_d \\ \dot{\theta}_d \\ \theta_l \\ \dot{\theta}_l \end{bmatrix}, \quad u = \tau \quad (23)$$

となる [4].

3 スライディングモード制御

本研究においてスライディングモード制御のシステムは、

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Q_p r \\ \sigma = Sx \end{cases} \quad (24)$$

のように表現できる [3]. ここで、 σ は切換面でありベクトル関数である。システムの挙動を超平面に拘束することを到達モード、拘束した挙動を原点である平衡点へ収束させることで安定化を図る制御をスライディングモード制御と呼ぶ。この概念図を以下の図 2 に示す [3].

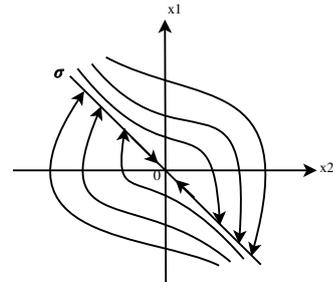


図 2 スライディングモード制御の概念図

3.1 切換超平面の設計

切換超平面とは、システムの状態を位相平面上で考えた時に、その挙動を拘束し安定化させる役割を果たす。切換超平面の設計法には極配置法を用いた設計法、固有ベクトル配置による設計法、最適な切換超平面の設計法、システムの零点を利用する設計法、周波数成形による設計法、 H_∞ 制御理論による設計法などが報告されている [3].

目標値の項 $Q_p r$ を無視した

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \sigma = Sx \end{cases} \quad (25)$$

に対して設計を行う。

入力切換が時間遅れなく理想的に行われ、制御対象が切換超平面に拘束され、 $\sigma = 0$ となった場合の制御系において、等価的に次の線形状態フィードバック制御入力

$$u_{eq} = -(SB)^{-1}SAx \quad (26)$$

が発生していると思なされる。このとき、切換超平面での等価線形系は

$$\dot{x} = \{A - B(SB)^{-1}SA\}x \quad (27)$$

で表される。そして切換超平面を決定するために、以下のように最適フィードバックゲイン F を

$$F = S = B^T P \quad (28)$$

とする。

ここで、切換行列 S を設計するために任意の $Q > 0$ を与えて、以下のリッカチ方程式

$$PA + A^T P - PBB^T P + Q = 0 \quad (29)$$

を解くことによって P を導出する [3].

3.2 スライディングモードコントローラの設計

制御目標は、切換面に状態を到達させ、その切換面に状態を拘束することである。本研究で使う最終スライディングモード制御法は等価制御入力 u_l と非線形制御入力 u_{nl} の二つから構成されている。また、 $u_l = -(SB)^{-1}(SAx + SQ_p r)$ 、 $u_{nl} = -K(SB)^{-1} \frac{\sigma}{\|\sigma\|}$ とすると最終スライディングモード制御法の制御入力は

$$\begin{aligned} u &= u_l + u_{nl} \\ &= -(SB)^{-1}(SAx + SQ_p r) - K(SB)^{-1} \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \end{aligned} \quad (30)$$

と表される。また非線形制御入力 u_{nl} は、システムの状態を切換面に拘束するための制御入力で、 K は非線形制御入力の大きさを調節するパラメータである。 $\sigma = 0$ を実現するために、 σ に関するリアプノフ関数を

$$V = \frac{1}{2} \sigma^T \sigma \quad (31)$$

とする。

スライディングモードの存在条件を満たすためには

$$\dot{V} = \sigma^T S(Ax + Bu + Q_p r) = -K \frac{\sigma^T \sigma}{\|\sigma\|} \quad (32)$$

が負定関数となればよい。すなわち、 $K > 0$ と定めれば存在条件を満たすことになる [3].

3.3 チャタリング防止策

スライディングモード制御システムの設計と解析の基本的な仮定は、制御入力がある値から別の値に無限の速さで切換えられるということである。しかし、実際のシステムにおいては、無限の速さで切換を行うことは不可能である。そのため、スライディングモードではチャタリングが発生することになる、そしてチャタリングは平衡点付近での高周波振動として現れる [3].

スランディングモード制御では、入力的高速切換によって制御対象をモデル化する際に無視した高周波数領域を励振し、スピルオーバーなどの原因となる。この問題を極力避けなければならないので、チャタリングを低減するために平滑関数を導入すると非線形制御入力 u_{nl} は

$$u_{nl} = -K(SB)^{-1} \frac{\sigma}{\|\sigma\| + \eta}, \eta > 0 \quad (33)$$

となる [3]. この η により、システムの状態が切換超平面に近づくにつれて、非線形制御入力が小さくなり、結果的にチャタリングの防止となる [3].

3.4 スライディングモードのロバスト性

次のシステム

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + Bu \quad (34)$$

を考える。このとき ΔA はシステムの不確かさを表す関数である。また今回はマッチング条件を満たす部分だけを考え、その不確かさを ΔA とした。このとき、等価制御入力は

$$u = -(SB)^{-1}S(Ax + \Delta Ax) \quad (35)$$

となる。スライディングモードが生じているときは u をもとの式 (34) に代入して

$$\dot{x} = \{I - B(SB)^{-1}S\}Ax + \{I - B(SB)^{-1}S\}\Delta Ax \quad (36)$$

となる。式 (34) において、不確かさ ΔA が B のレンジスペースに存在するならばマッチング条件は

$$\Delta A = BG \quad (37)$$

表現できる。このとき ΔA はシステムの不確かさを表す関数である。そして本研究ではシステムの A 行列の不確かさとしている部分全体を考えるとマッチングを満たしていないため、システムの A 行列の不確かさを含む部分の中でもマッチング条件を満たしている部分のみを ΔA としている。よって、式 (37) を満たすような G が存在しマッチン

グ条件を満たす。そして、式 (37) を式 (36) に代入すると、スライディングモードが生じていると

$$\begin{cases} \dot{x} = \{I - B(SB)^{-1}S\}Ax \\ \sigma = 0 \end{cases} \quad (38)$$

となり、不確かさ ΔA の影響はなくなる [3]。

次に、非線形制御入力については以下に

$$u_{nl} = -\frac{\sigma}{\|\sigma\|}\bar{\rho} \quad (39)$$

と定める。ここで、 $\bar{\rho}$ は未知の関数である。

そして、ある連続正関数 ρ が存在するとし $h = Gx$ とすると、不確かさが

$$\|h\| \leq \rho \quad (40)$$

のように限定されとする。

不確かさを含むシステムの安定性を検討するため、 σ に関するリアプノフ関数の候補を

$$V = \frac{1}{2}\sigma^T\sigma \quad (41)$$

とする。この関数の微分は

$$\dot{V} = \sigma^T\dot{\sigma} \quad (42)$$

$$= \sigma^T(S\dot{x})$$

$$= \sigma^T\{SAx + SBu_{eq} - SB\frac{\sigma}{\|\sigma\|}\bar{\rho} + SBh\} \quad (43)$$

となる。

ここで、等価制御入力を代入すると

$$\dot{V} = -\sigma^T(SB)\frac{\sigma}{\|\sigma\|}\bar{\rho} + \sigma^T SBh \quad (44)$$

を得る。そして、以下の

$$\dot{V} = -SB\|\sigma\|^2\frac{\bar{\rho}}{\|\sigma\|} + \|\sigma\|SB\rho \leq 0 \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \|\sigma\|SB\rho &\leq SB\|\sigma\|^2\frac{\bar{\rho}}{\|\sigma\|} \\ \rho &\leq \bar{\rho} \end{aligned} \quad (46)$$

となるように $\bar{\rho}$ を定めることにより \dot{V} は負定関数となるので、システムは安定となる [3]。

4 シミュレーションと実験結果

本研究ではスライディングモード制御を適用して、ロードプーリの角度を $\frac{\pi}{2}$ [rad] に止めることを目標としてシミュレーションと実験を行った。そして、スライディングモード制御を用いマッチング条件を満たした部分の不確かさについてロバスト性を保証し不確かさの範囲を小さく限定した方がシミュレーションと実験の誤差が小さくなりより良くなった。また、不確かさの大きさを限定する式 (46) の $\bar{\rho}$ を大きく定めたときのロードプーリのシミュレーションと実験結果のグラフを図 3 に示し、不確かさの大きさを限定する式 (46) の $\bar{\rho}$ を小さく定めたときのロードプーリのシミュレーションと実験結果を図 4 に示す。

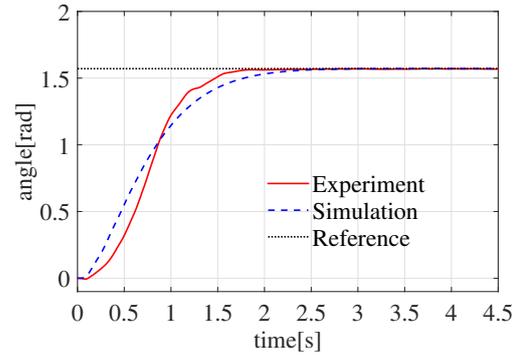


図 3 $\bar{\rho}$ を大きく定めた場合のロードプーリの角度

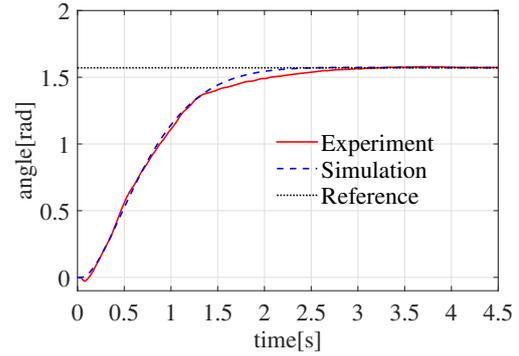


図 4 $\bar{\rho}$ を小さく定めた場合のロードプーリの角度

5 おわりに

本研究の成果はベルト駆動にスライディングモード制御を適用し、ばね定数の不確かさに対してマッチング条件を満たす部分のみを考慮してロバスト性の保証したことである。そして今回用いた制御方法で実験を行い、不確かさの大きさの範囲を小さく適切に限定できた方が、シミュレーションと実験の誤差が少なくなり、より忠実に目標値に追従させることができた。今後の課題は物理パラメータの不確かさを含むモデル全体を考え、マッチング条件を満たしていない部分も含めて考慮し、マッチング条件を満たしていない場合の制御設計をすることである。

参考文献

- [1] 太田 悠斗, “アイトラプーリを考慮したベルト駆動の目標値追従制御”, 南山大学情報理工学部システム創成工学科卒業論文, 2016.
- [2] “Manual for Model 220 Industrial Emulator/Servo Trainer”, Educational Control Products, 1995.
- [3] 野波 健蔵, 田 宏奇, “スライディングモード制御-非線形ロバスト制御の設計理論-”, コロナ社, 1994.
- [4] 川田 昌克, “MATLAB/Simulink による現代制御入門”, 森北出版, 2011.