

# 平衡盤のダイナミクスを考慮した2次元平面ボールバランスの制御

2013SE076 加藤雄大

指導教員：陳幹

## 1 はじめに

本研究では2自由度ボールバランス(以下2DBBと省略する)を制御対象とし、最適レギュレータ制御を用いて、ボールの目標値追従を目的としている。2DBBとは平面上にボールを置き、平面を傾けることで、ボールを目標とする位置や軌道に追従させる制御を行うものである。

## 2 モデリング

制御対象である $x$ 軸方向の2DBBの概略図を図1に、SRV02の概略図を図2に示す。

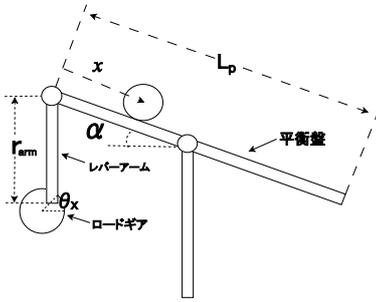


図1 2DBBシステムの概略図

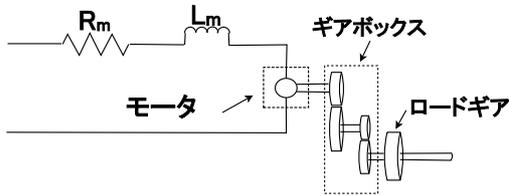


図2 SRV02の概略図

### 2.1 運動方程式

2DBBの運動方程式を導出する。 $x, y$ 軸方向のそれぞれのボールの変位を $x, y$ 、SRV02のロードギアの角度を $\theta_x, \theta_y$ 、平衡盤の角度を $\alpha, \beta$ とする。ボールの運動エネルギーを $T_b$ 、平衡盤の運動エネルギーを $T_p$ 、ボールが平衡盤から受ける運動エネルギーを $T_{bp}$ 、ボールのポテンシャルエネルギーを $U_b$ とする[1][2]。

$$T_b = \frac{1}{2}m_b(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J_b\left(\left(\frac{\dot{x}}{r_b}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}}{r_b}\right)^2\right) \quad (1)$$

$$T_p = \frac{1}{2}J_p(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \quad (2)$$

$$T_{bp} = \frac{1}{2}m_b(\dot{\alpha}x + \dot{\beta}y)^2 \quad (3)$$

$$U_b = m_b g x \sin \alpha + m_b g y \sin \beta \quad (4)$$

このときボールは平衡盤の上を滑らないものとする。 $L_t = T_b + T_p + T_{bp} - U_b$ 、一般化座標を $x, y, \alpha, \beta$ とすると以下ようになる。

$$\ddot{x} = -\frac{m_b r_b^2}{m_b r_b^2 + J_b}(\dot{\alpha}^2 x + \dot{\alpha} \dot{\beta} y) + \frac{m_b r_b^2}{m_b r_b^2 + J_b} g \sin \alpha \quad (5)$$

$$\ddot{y} = -\frac{m_b r_b^2}{m_b r_b^2 + J_b}(\dot{\beta}^2 y + \dot{\alpha} \dot{\beta} x) + \frac{m_b r_b^2}{m_b r_b^2 + J_b} g \sin \beta \quad (6)$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{m_b}{J_p}(\ddot{\alpha} x^2 + 2\dot{\alpha} \dot{x} x + \ddot{\beta} x y + \dot{\beta} \dot{x} y + \dot{\beta} x \dot{y} + g x \cos \alpha) + \frac{J_l}{J_p} \ddot{\theta}_x \quad (7)$$

$$\ddot{\beta} = -\frac{m_b}{J_p}(\ddot{\beta} y^2 + 2\dot{\beta} \dot{y} y + \ddot{\alpha} x y + \dot{\alpha} \dot{x} y + \dot{\alpha} x \dot{y} + g y \cos \beta) + \frac{J_l}{J_p} \ddot{\theta}_y \quad (8)$$

$x, y$ についての一般化力を0、 $\alpha, \beta$ についての一般化力をロードギアのそれぞれの回転トルク $J_l \ddot{\theta}_x, J_l \ddot{\theta}_y$ とした。

次にSRV02について考える。SRV02は $x, y$ 軸方向同じような操作によって動くため、ここでは $x$ 軸方向についてのみ考える。

ロードギアについて運動方程式を導出する。ロードギアの運動エネルギーを $T_{l,x}$ 、損失エネルギーを $D_{l,x}$ とすると、以下ようになる。

$$T_{l,x} = \frac{1}{2} J_l \dot{\theta}_x^2 \quad (9)$$

$$D_{l,x} = \frac{1}{2} B_l \dot{\theta}_x^2 \quad (10)$$

一般化力をロードギアのトルクとする。一般化座標を $\theta_x$ とし、 $L_l = T_{l,x} + D_{l,x}$ とすると以下ようになる。

$$J_l \ddot{\theta}_x = -B_l \dot{\theta}_x + \frac{\eta_m \eta_g K_t K_g}{R_m} V \quad (11)$$

ロードギアの角度 $\theta_x, \theta_y$ と平衡盤の角度 $\alpha, \beta$ に関してそれぞれ以下のような関係式が成り立つ。

$$\sin \alpha = \frac{2r_{arm}}{L_p} \sin \theta_x \quad (12)$$

$$\sin \beta = \frac{2r_{arm}}{L_p} \sin \theta_y \quad (13)$$

### 2.2 状態空間表現

状態変数を

$$x = [x \ \dot{x} \ \theta_x \ \dot{\theta}_x \ y \ \dot{y} \ \theta_y \ \dot{\theta}_y]^T \quad (14)$$

とする。入力 $u$ を電圧 $V$ とする。 $\alpha = 0, \beta = 0, \theta_x = 0, \theta_y = 0$ で一次の項でテイラー展開により近似して線形化を行うと、状態空間表現は以下ようになる。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (15)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2r_{arm}m_b r_b^2 g}{m_b r_b^2 + J_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{m_b L_p g}{2J_p r_{arm}} & 0 & 0 & -\frac{B_l L_p}{2J_p r_{arm}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2r_{arm}m_b r_b^2 g}{m_b r_b^2 + J_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{m_b L_p g}{2J_p r_{arm}} & 0 & 0 & -\frac{B_l L_p}{2J_p r_{arm}} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{L_p \eta_m \eta_g K_t K_g}{2r_{arm} J_p R_m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{L_p \eta_m \eta_g K_t K_g}{2r_{arm} J_p R_m} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (18)$$

### 3 制御器設計

本研究では制御手法に最適レギュレータ理論 [3] を用いる。最適レギュレータ理論とは、状態方程式 (19) について、与えられた重み行列  $Q$ ,  $R$  に対して評価関数 (22) を最小化するコントローラ (21) のゲイン  $K$  を求めることである。 $Q$  は対角行列である。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (19)$$

$$y = Cx \quad (20)$$

$$u = Kx \quad (21)$$

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (22)$$

ゲイン  $K$  は

$$K = -R^{-1}B^T P \quad (23)$$

よって与えられる。 $P$  は、リカッチ方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (24)$$

を満足する正定対称解  $P = P^T > 0$  で、唯一に定まる。

#### 3.1 拡大系

本研究ではボールを目標値に追従させるために、状態変数に偏差の積分項を加えた拡大系を導入する。

#### 3.2 ゲインの導出

ゲインの導出を行うために状態空間表現の  $x$  軸と  $y$  軸に対応した変数の係数はそれぞれ等しいため、 $x$  軸と  $y$  軸を分けて考える。重み行列  $Q$ ,  $R$  を

$$Q = \text{diag}[1 \ 30 \ 0.1 \ 0.07 \ 5], R = 1 \quad (25)$$

とする。このときに求められたゲインは以下のようなになる。

$$K = [-5.7994 \ -7.1498 \ -2.0754 \ -0.2438 \ 2.2361] \quad (26)$$

## 4 シミュレーションと実験の結果

非線形シミュレーションの結果を図 3, 実験の結果を図 4 に示す。

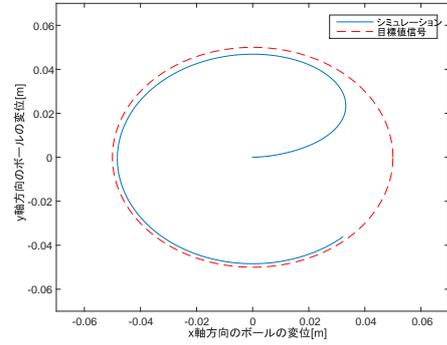


図 3 シミュレーション結果

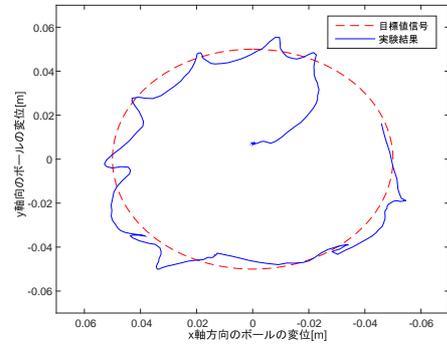


図 4 実験結果

## 5 終わりに

本研究の成果として、ボールが平衡盤から受ける運動エネルギーを考慮したモデルによってシミュレーション、実験を行い、誤差は大きいながらもボールを制御することができた。今後の課題として、レバーアームの重さが SRV02 のロードギアの回転に影響を与えているので、レバーアームの重さに対する重力補償や SRV02 のモデル化誤差が大きいため、より実機に近い SRV02 の新たなモデルの導出が考えられる。

## 参考文献

- [1] Andrej Knuplž, Amor Chowdhury, Rajko Svec̆ko, “Modeling and control design for the ball and plate system”, IEEE International Conference on Industrial Technology, pp. 1064-1067, 2003.
- [2] Mohammad Nokhbeh, Daniel Khashabi, “Modelling and Control of Ball-Plate System Final Project Report”, Amirkabir University of Technology, 2011.
- [3] 川田昌克, “MATLAB/Simulink による現代制御入門”, 森北出版株式会社, 2011.