3 次元アナモルフォーシス

2012SE216 佐野　愛

指導教員：杉浦　洋

1　はじめに

アナモルフォーシスとは，ギリシア語で再構成を意味し，歪んだ画像を円筒鏡などの曲面鏡に映したり，角度を変えてみたりすることで正常な形が見えるようになるデザイン技法のひとつである．このように歪んだ絵は，日本語で「歪み絵」と訳される．歪み絵，一見すると何が描いてあるのかわからない不思議な絵である．

昨年度は，机上の歪んだ絵を円筒鏡に正常な絵として映し出す研究であったが，今年度は，歪んだ立体模型を円筒鏡によってきれいに映し出す研究をする．

アナモルフォーシスを題材にして，変換術を作り出す空間思考の力の育成を図る．

2　歴史

アナモルフォーシスの歴史は古く，古代ギリシア時代にはすでに存在し，レオナルド・ダ・ヴィンチも手掛けるなどルネッサンス時代には全盛期を迎えた．日本では，江戸時代に刀の鞘を投影用の円筒として利用したものが流行し，「鞘絵」と呼ばれた．『レオナルドの目』　(レオナルド・ダ・ヴィンチ 1485 年) が斜面投影の確認される最も古い例である．またハンス・ホルバインはよくこの手のアナモルフォーシスを使用していたことで知られている．彼の絵の中で，『大使たち』(1533 年) はその例として最も有名である．絵の下部にゆがんだ物体が描かれており，この物体は左斜め下から見ると人の頭蓋骨に見えるようになっている．17 世紀のバロック時代には，建築と組み合わせる形でトロンプルイユの壁画などにも用いられた．イタリアのローマ・イニャツィオ聖堂にある天井画はアンドレア・ポッツォにより天井がドームに見えるようにと依頼を受けており，人物部分をアナモルフォーシスで描き，背景部分でトロンプルイユの技法を用いて，柱を描いている．この天井画をある一定の地点から見ると，錯覚により天井に奥行き感が与えられ，実際以上の高さを持っているように見える．18 世紀から 19 世紀には，アナモルフォーシスの絵が美術よりも子供向けの遊びとして利用されるようになる．20 世紀には何人かの芸術家により新たなるアナモルフォーシスの技法が探求された．マルセル・デュシャンはアナモルフォーシスへの強い関心を抱くようになり，いくつかの作品にこの技法が用いられている．また，サルバドール・ダリもこの技法を用いていくつかの作品を描いた．ヤン・ディベッツは，角度を変えてみたとき正常な形となるアナモルフォーシス形式に関する研究を行った．

3　円筒鏡の幾何光学

円筒鏡の内部には外界を写した歪んだ小世界が見える．外界の立体像 A は円筒内小世界の歪んだ立体 A' として見える．この逆問題を解くことが，円筒鏡アナモルフォーシス立体の設計である．すなわち，円筒鏡内の小世界における任意の立体像 A' に対応する外界の原像 A の形状を求めることである．像 A' の表面に稠密に点 $\boldsymbol{s}_i$ をとり，A' の表面を $\boldsymbol{s}_i$ を頂点とする微小な多角形から成る多面体 B' で近似する．頂点 $\boldsymbol{s}_i$ に写り込む外界の点 $\boldsymbol{p}_i$ を計算し，それらを頂点とする多面体 B を作る．B は，A' の原像 A の近似多面体となる．

そこで，問題は円筒内の点 $\boldsymbol{s}$ と鏡像関係にある外界の点 $\boldsymbol{p}$ を求めることに帰着される．

円筒内の点を $\boldsymbol{s} = (s_x, s_y, s_z)$，目を $\boldsymbol{m} = (m_x, 0, m_z)$ とする．求めるべき円筒外の点を $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ とする．$\boldsymbol{p}$ から出た光は円筒表面の $\boldsymbol{q} = (x, y, z)$ で反射して $\boldsymbol{m}$ に入るが，それが $\boldsymbol{s}$ から来た光に見えるためには $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{s}$ が一直線上にあればよい．

まず，はじめに $\boldsymbol{q}$ は線分 $\boldsymbol{ms}$ と鏡面の交点にあることから求める．円筒と直線の交点は 2 つあるが，そのうち，目に近い方が採用される．

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{1}$$

$$y = \frac{s_y}{s_x - m_x}(x - m_x) \tag{2}$$

2 式より，(2) を (1) に代入し，x の大きい方採用する．

q_z は m_z と s_z を $(m_x - x) : (x - s_x)$ に内分した点をとる．

$$z = q_z = \frac{(x - s_x) \cdot m_z + (m_x - x) \cdot s_z}{m_x - s_x}$$

次に，$\boldsymbol{m}'$ を求める．

$\boldsymbol{q}$ における鏡面の法線ベクトル $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{q}_x, \boldsymbol{q}_y, 0)$ である．反射の法則から，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{q} + \boldsymbol{n}$ は同一平面上で，かつ

$$\angle \boldsymbol{mq}(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{n}) = \angle \boldsymbol{pq}(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{n}) = \theta$$

となる．

$\boldsymbol{m}$ から直線 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{n})$ におろした垂線と直線 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{n})$ の交点を $\boldsymbol{h}$ とすると，

$$\boldsymbol{h} - \boldsymbol{q} = \cdot \|\boldsymbol{m} - \boldsymbol{q}\| \cdot \frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|}(\cos\theta) \tag{3}$$

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{q})}{\|\boldsymbol{n}\| \|\boldsymbol{m} - \boldsymbol{q}\|} \tag{4}$$

より，(4) を (3) に代入して整理すると，

$$h = \frac{\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{q})}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{q} \tag{5}$$

となる．

次に，$\boldsymbol{h}$ に対して $\boldsymbol{m}$ と対称な点 $\boldsymbol{m'}$ の式とすると，直線 $\boldsymbol{qm'}$ 上の任意の点が解 $\boldsymbol{p}$ である．$\boldsymbol{p}$ を一意に定めるため，$\boldsymbol{qp}$ を $\boldsymbol{ps}$ の定数 α 倍にとる．($\boldsymbol{p}$ から鏡面の点 $\boldsymbol{q}$ で反射した光は $\boldsymbol{m}$ に入る．それは，$\boldsymbol{s}$ からきた光に見える．)

反射の法則から，h に対して $\boldsymbol{m}$ と対称な点 $\boldsymbol{m'}$ は線分 $\boldsymbol{qp}$ 上にある．

$$\boldsymbol{m'} = \boldsymbol{m} + 2(h - \boldsymbol{m}) = 2h - \boldsymbol{m}$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} + \alpha\frac{\|\boldsymbol{s} - \boldsymbol{q}\|}{\|\boldsymbol{m'} - \boldsymbol{q}\|}(\boldsymbol{m'} - \boldsymbol{q})$$

となる．

4　円筒鏡アナモルフォーシス立体の作製

1.Mathmatica で円筒鏡内部に見たい像を 3 次元図形データ（グラフィックスプリミティブ）として，作製する．(図 1)

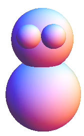

図 1　原像

2.Export 関数で stl データに変換し，stl ファイルとして，セーブする．stl データは，3 次元図形を三角形の面からなる多面体として表現する．頂点を xyz 座標で表現する．頂点には番号を付け，三角形は 3 頂点の番号の組で表現する．(図 2)

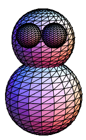

図 2　stl データ像

3.Import 関数で stl ファイルを読み込み，Mathmatica の GraphicsComplex 形式の 3 次元図形データに変換する．これは，stl データと等価で頂点座標と三角面の頂点番号から成る．(図 3)

4. 頂点座標のデータを逆円筒鏡変換する．変換された座標点は，円筒鏡に映されたときに元の座標点に存在するかのように見える．(図 4)

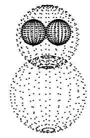

図 3　原像の頂点

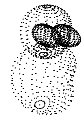

図 4　逆鏡像変換された頂点

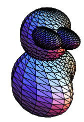

図 5　作品の stl データ像

5. 変換後の座標データと元の面データを統合して，新しい 3 次元図形データを作製する．この図形は，円筒鏡に映されたときに円筒内の見たい像と重なる．(図 5)

6. 変換後のデータを Export 関数で stl データ変換し，stl ファイルとしてセーブする．

7.Stl データを，CubeX 3DSystems で Stl ファイルに変換し，USB メモリにセーブする．

8. そして，3D プリンター CubeX に USB メモリで Stl ファイルを供給し，作品をプリントアウトする．

5　おわりに

本論文では，アナモルフォーシスについて幾何光学的に研究した．円筒鏡の反射を詳しく調べ，原像から像への写像を具体的に構成することにより，入力画像から円筒鏡アナモルフォーシス画像を出力する Mathematica プログラムを作成した．また，像から原像への写像を具体的に構成し，それによる円筒鏡アナモルフォーシス立体の設計法を考案し，設計されたアナモルフォーシス立体を 3D プリンタで実現して視覚効果を確かめることができた

参考文献

[1] 杉原厚吉：『だまし絵と線形代数』，共立出版 (2012)

[2] 都築大　『3 次元アナモルフォーシスー幾何光学に関するアナモルフォーシスー』　南山大学　情報理工学部卒論,2015

[3] wikipedia『アナモルフォーシス』: https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%A2%E3%83%8A%E3%83%A2%E3%83%AB%E3%83%95%E3%82%A9%E3%83%BC%E3%82%B7%E3%82%B9