長方形領域における2次元5次適応型積分則

2012SE182 野田健太
指導教員：杉浦洋

1　はじめに

2次元の一般的な領域上の積分は，適当な領域分割と変数変換により長方形領域上の積分に帰着できる．この意味で長方形領域上の数値積分則は基本的で重要である．

本研究では二次元長方形領域上の定積分を近似する適応型数値積分則の構成を行う．

適応型積分則とは，要求精度にしたがって長方形領域を小長方形領域に分割し，各小長方形領域に同じ基本公式を用いる計算法である．分割が細かくなればなるほど精度はよくなる．その際，積分誤差の小さい部分は粗く分割し，積分誤差の大きい部分は細かく分割することで，一様均等な分割法と同じ精度が，より少ない分割数で達成できる．

分割法については，分割する前に各方向で分割後の誤差を推定し，その絶対値が小さい方向に分割するという，三角形領域上の積分における，西田 [3] のアイデアを用いた．また，基本領域における誤差推定には複数個の低次埋め込み型公式を用いるという，三角形領域における，嶋出 [4] のアイデアを用いることにより騙されにくい誤差評価法を構成することを目指した．

本論文では，計算効率を考え，古田 [1] の5次再利用完全対称可能公式に，誤差推定能力を持たせる改良を施したものを用いた．片峯 [2] は西田，嶋出のアイデアを用いて，長方形領域の適応型積分則の構成したが，基本公式は3次であった．我々は基本積分則に5次公式を用い，より精度の高い積分則を目指す．

2　数値積分則の設計

xy-平面上の長方形領域を $D=[a,b]\times[c,d]$ と書く．D 上の関数 f の積分を $Q(D)f=\int_D f(x)dxdy$ と置く．基本長方形領域 $\Delta=[-1,1]\times[-1,1]$ の n 個の標本点 $\boldsymbol{\pi}_1=(\xi_1,\eta_1),\boldsymbol{\pi}_2=(\xi_2,\eta_2)$，$\cdots,\boldsymbol{\pi}_n=(\xi_n,\eta_n)\in\Delta$ と重み ρ_1,ρ_2，$\cdots,\rho_n$ による積分公式を

$$I_n f=\sum_{l=1}^{n}\rho_l f(\boldsymbol{\pi}_l)\cong\int_{\Delta}f(\boldsymbol{x})dxdy \tag{1}$$

と書く．

$\boldsymbol{q}\in\Delta$ から一般の長方形領域 $\boldsymbol{p}\in D$ へのアフィン変換 $\boldsymbol{p}=\varphi(\boldsymbol{q})$ による変数変換で

$$Q(D)f=\int_D f(\boldsymbol{p})dxdy=\frac{S}{4}\int_{\triangle}f(\varphi(\boldsymbol{q}))dtdu. \tag{2}$$

この右辺に積分則 I_n を用いて D 上の積分公式

$$I_n(D)f=\frac{S}{4}\sum_{i=1}^{n}\rho_i f(\varphi(\xi_i,\eta_i))\cong Q(D)f \tag{3}$$

を得る．ここで，S は D の面積である．

[定義 2.1]　任意の s 次式 f で $I_n(D)f=Q(D)f$，かつ $I_n(D)f\neq Q(D)f$ となる $s+1$ 次式 f が存在するとき，積分公式 $I_n(D)$ は次数 s であると言う．//

3　適応型積分則の基本アルゴリズム

$\epsilon>0$ を許容誤差とする適応型積分則 $Q(D,\epsilon)$ は次のような再帰関数で表現できる．

$$Q(D,\epsilon)f=\begin{cases} I_n(D)f & (E_n(D)f\le\epsilon)\\ Q(D_1,\frac{\epsilon}{2})+Q(D_2,\frac{\epsilon}{2}) & (E_n(D)f>\epsilon)\end{cases}$$

$E_n(D)$ は $I_n(D)$ の絶対誤差の評価式である．このアルゴリズムでは，与えられた許容誤差 $\epsilon>0$ に対し真の積分値 $Q(D)f$ の近似積分 $I_n(D)f$ を

$$|I_n(D)f-Q(D)f|\le\epsilon \tag{4}$$

が満たされるなら採用する．もし，

$$|I_n(D)f-Q(D)f|>\epsilon \tag{5}$$

なら，辺に平行な直線で小長方形領域 D_1,D_2 に2等分し（図1），それぞれに同じ積分則 (3) を用いる．

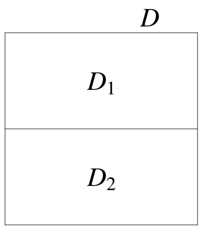

図 1　長方形の分割

この再帰的な操作を繰り返し，すべての小領域で割り当てられた許容誤差を満たした時点で近似積分が完了する．

4　積分公式と誤差評価法

4.1　古田の5次再利用可能完全対称公式

基本積分則として，古田の5次再利用可能完全対称公式を用いた．標本点数24で，分割に要する標本点数は18である．標本点に配置を図2に示す．

4.2　誤差推定

4.2 誤差推定

古田の5次公式の $n=24$ 点の標本点上で，被積分関数 $f(x,y)$ の5次最小2乗近似多項式

$$P(x)=\sum_{i,j\ge 0}^{i+j\le 5}c_{ij}x^i y^i \tag{6}$$

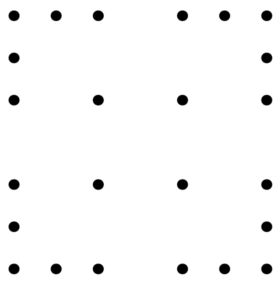

図 2　5 次公式の標本点

を構成する．古田公式は

$$I_n f = \int_{\Delta} P(x,y)dxdy \cong \int_{\Delta} f(x,y)dxdy \tag{7}$$

で設計されている．

$P(x,y)$ の x^4, x^2y^2, y^4 の係数 $c_{4.0}, c_{2.2}, c_{0,4}$ の係数を 0 とした多項式 $P^{[0]}(x,y)$，$P^{[2]}(x,y)$，$P^{[4]}(x,y)$ により，3 つの 3 次公式

$$I_n^{[i]} f = \int_{\Delta} P^{[i]}(x,y)dxdy, \quad i = 0,2,4 \tag{8}$$

が得られる．それにより，3 つの誤差評価式

$$E_n^{[i]} f = \left|I_n^{[i]} f - I_n f\right| \cong \left|I_n^{[i]} f - If\right| \geq \left|I_n f - If\right| \tag{9}$$

を得る．最後の不等式は「期待」である．これを用いて，$I_n f$ の誤差評価式を

$$E_n f = \alpha \max\{E_n^{[0]} f, E_n^{[2]} f, E_n^{[4]} f\} \tag{10}$$

とした．

式 (10) の α は安全係数で，実験的に定める．α が大きすぎると積分則の失敗が多くなる．小さすぎると領域分割が増え，積分則の効率が悪くなる．具体的には許容誤差 $\epsilon = 10^{-4}$ とし，10 次以下の単項式が許容誤差範囲内で積分できるように調整し，$\alpha = 0.071007$ とした．

4.3 分割方向の決定法

西田 [3] の分割方向決定方法は，分割後の誤差を分割以前に推定し，推定誤差の小さい方向に分割するものである．西田のアイデアを用いて，次の方法を考案した．

分割後の被積分関数 $f(x,y)$ の標本値は未知なので，誤差評価 (10) が使えない．そこで，$f(x,y)$ の標本値の近似として (6) の 5 次最小 2 乗近似多項式 $P(x,y)$ の標本値を用いる．評価式 (9) は実質的に 3 次公式 $I_n^{[i]} f$ の誤差評価式なので，$f(x,y)$ を 5 次近似式 $P(x,y)$ で置き換えても差し支えない．

5　数値実験結果

許容誤差 $\epsilon = 10^{-4}$ で

$$If = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \tag{11}$$

計算した結果．片峯の誤差は $2.40 \times 10^{-5} < \epsilon$ となり積分は成功した．分割数は 475 回，標本点数は 6667 点であった．領域分割の結果を図 3 に示す．

我々の誤差は $1.88 \times 10^{-6} < \epsilon$ となり積分は成功した．分割数は 123 回，標本点数は 2238 点であった．領域分割の結果を図 4 に示す．

図 3，図 4 を見ると，関数がなだらかな原点遠い領域では分割数が少なく，急峻な原点近傍では分割数が多くなっており，片峯の方法も我々の方法も合理的に分割が行われていることが分かる．

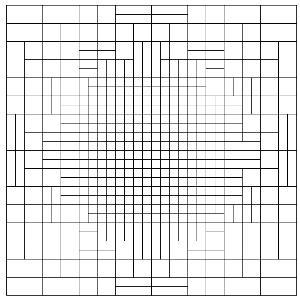

図 3　片峯の分割結果

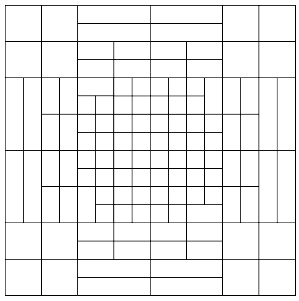

図 4　我々の分割結果

6　おわりに

長方形領域における数値積分において，精度の低い長方形領域を 2 つの小長方形領域に分割することを繰り返して，求める精度の近似積分を行う適応型積分則のアルゴリズムを作成した．基本積分則としては，古田 [1] の再利用可能完全対称積分公式から 5 次のものを用いた．誤差評価と分割方向の決定を，被積分関数の最小 2 乗近似 5 次多項式の 4 次以上の係数を用いて行う方法を考案した．

Mathematica によるプログラムを作成し数値実験を行った．我々は，基本積分則に 5 次公式を用い，片峯 [2] より精度の高い積分則を目指した．数値実験の結果，5 次公式を用いた我々の方法は，3 次公式を用いた片峯の方法より，使用標本点数が少なかった．特に 2 変数ガウス関数の積分では許容誤差 10^{-4} で実験して標本点数は片峯の約 1/3 であった．

7　参考文献

[1] 古田純也，長方形領域の再利用可能積分公式，南山大学数理情報学部情報システム数理学科 2012 年度卒業論文，2013.

[2] 片峯由莉香，長方形領域における 2 次元適応型積分則，南山大学数理情報学部情報システム数理学科 2011 年度卒業論文，2012.

[3] 西田絵里奈，2 次元適応型積分則 (三角形分割の戦略．2)，南山大学数理情報学部情報システム数理学科 2009 年度卒業論文，2010.

[4] 嶋出静香，2 次元適応型積分則 (誤差評価法)，南山大学数理情報学部情報システム数理学科 2010 年度卒業論文，2011.