代用電荷法による近似等角写像

2012SE081 亀井結生

指導教員：杉浦洋

1 はじめに

代用電荷法は2次元ラプラス方程式の数値解法として提案された．2次元領域 $\boldsymbol{D}$ におけるラプラス方程式の解である調和関数を，領域の外に配置された2次元点電荷の作る電場と想定し，境界条件に合わせて点電荷の電荷量を調整する．

代用電荷法を選ぶ理由は，厳密解が十分なめらかならば，少ない手間で高精度の近似解が得られやすいこと，導関数を精度良く計算しやすく，特に厳密解が十分なめらかならば，境界まで込めてよい近似を与えることの二つの長所を持っているためである．つまり，特定の条件が揃っていると非常に良好な結果を導くということである．

本研究では，小山田 [2]，永田 [3] に続き，電荷配置を精密に調整する実験を行い，最適な電荷配置について考察する．

2 代用電荷法

z 平面の領域 D で正則な関数を

$$P(z) = u(z) + iv(z)$$

とする．$u(z), v(z)$ は $P(z)$ の実部と虚部である．$u(z)$ は D の調和関数なので，D における静電場のポテンシャルと考えることができる．D で $P'(z) \neq 0$ とすると，$P(z)$ の等角性により，$u(z)$ の等高線と v の等高線は直交するので，$v(z)$ の等高線は，その電場の電気力線である．以下，$P(z)$ をこの電場の複素ポテンシャルと呼ぶ．さて，点 $\alpha \in \mathbb{C}$ に在る電荷量 q の電荷の作る電位

$$u(z) = -q \log|z-\alpha|$$

は複素対数関数

$$P(z) = -q\log(z-\alpha) = -q\log|z-\alpha| - qi\arg(z-\alpha)$$

の実部であるから，$P(z)$ がこの電場の複素ポテンシャルである．その虚部

$$\mathrm{Im} f(z) = -q\arg(z-\alpha)$$

の等高線は電気力線である．

天野 [1] は原点の電荷量 -1 の電荷による電位 0 の等電位線（$|z| = 1$）を，n 個の電荷で変形し，目標とする領域 D の境界に合わせることを考えた．領域 D 内に特異点が生じないように，付加する N 個の電荷は D の外部にとる．生ずる複素ポテンシャルは，任意定数 c（実数）を新たに導入して，

$$P(z) = \log z - \sum_{i=1}^{n} q_i \log(z-\zeta_i) + ic$$

とする．天野の領域拡大法では，D を原点を中心に領域拡大率 $R_q > 1$ で相似拡大した $R_q D$ の境界 $\delta(R_q D)$ 上に電荷点 ζ_1〜ζ_m を配置する．

∂D 上では電位 $u(z) = 0$ となるべきだから，条件

$$u(z_j) = \log|z_j| - \sum_{i=1}^{n} q_i \log|z-\zeta_i| = 0 \ (1 \leq j \leq m) \quad (1)$$

により，電荷量 $q_1 \sim q_n$ を決定する．$m = n$ のときはガウス消去法 [1,2]，$m > n$ のときは最小2乗法を用いる [3]．

方程式 (1) により電荷量 q_i を定め，求める等角写像は，

$$f(z) = ze^{\tilde{P}(z)}$$

$$\tilde{P}(z) = -\sum_{i=1}^{n} q_i \log|z-\zeta_i| - i\sum_{i=1}^{n} q_i \arg(1-\frac{z}{\zeta_i})$$

となる．

3 小山田と永田の実験結果

小山田は，式 (1)$m = n$ とする天野の方法の数値実験を行った．方程式 (1) は n を大きくすると頻繁に悪条件問題となり，ガウス消去法で解けなくなった．

永田は，$m = 2n$ として最小2乗法で解けば，方程式 (1) は安定化され，数値的に解きやすくなることを示した．また，それにより近似等角写像の精度が損なわれることもなかった．

4 数値実験

永田の研究によって，電荷点数 n と拘束点数 m は m=$2n$ の場合で十分であると結論付けられた．以降の考察は，m=$2n$ の場合を前提として続ける．

今回の数値実験では，領域拡大率 R_q の数値をより精密に調整し，最小の最大絶対誤差 E_R を達成する R_q を求めるとともに，その時点での拘束点，及び，電荷点の配置を示し，考察を重ねる．問題のパラメータ a と電荷点数 n は

$$a = 2^{1/2}, 2^{1/8}, 2^{1/32}$$

$$n = 16, 32, 64$$

を用いる．

4.1 Cassini の楕形

与えられる境界関数は

$$C : \{(x+1)^2 + y^2\}\{(x-1)^2 + y^2\} = a^4$$

であり，その解等角写像は

$$f(z) = \frac{az}{\sqrt{a^4 - 1 + z^2}}$$

である．最大絶対誤差 E_R が最小のときの領域拡大率 R_q と条件数を表 1 にまとめ，そのデータを分析する．

表 1 Cassini の橙形 ($m = 2n$)

a	$n=16$	$n=32$ R_q E_R 条件数	$n=64$
$2^{1/2}$	1.735 2.97×10^{-5} 710	1.730 2.51×10^{-7} 1.63×10^5	1.730 1.54×10^{-10} 5.64×10^9
$2^{1/8}$	1.492 8.09×10^{-4} 71.3	1.499 9.34×10^{-5} 5.22×10^3	1.508 1.41×10^{-6} 1.74×10^7
$2^{1/32}$	1.412 1.79×10^{-3} 61.5	1.405 5.18×10^{-4} 2.18×10^3	1.424 1.01×10^{-4} 2.82×10^6

表 1 を分析する．最大絶対誤差 E_R が最小である場合において，条件数の数値も線形方程式を解く上での悪条件性を回避しており，領域拡大率 R_q は電荷点，拘束点の個数にあまり関係がなく．問題のパラメータ a との相関が強いことがわかる．これは，最適領域拡大率が解の性質を反映していることを暗示している．そこで，電荷配置曲線が $f(z)$ の特異点とぶつかる領域拡大率 R_q を計算すると，最適拡大率に非常に近かったことがわかった．

4.2 対数関数

与えられる境界関数は

$$C : z = \exp(a\mathrm{e}^{i\theta}) - 1 \qquad (0 \leqq \theta \leqq\ 2\pi)$$

であり，その解等角写像は

$$f(z) = \frac{1}{a}\log(z+1)$$

である．最大絶対誤差 E_R が最小のときの領域拡大率 R_q と条件数を表 2 にまとめ，そのデータを分析する．

表 2 対数関数を用いた写像関数 ($m = 2n$)

a	$n=16$	$n=32$ R_q E_R 条件数	$n=64$
$2^{1/2}$	1.453 9.90×10^{-4} 391	1.430 1.98×10^{-5} 4.42×10^4	1.423 1.88×10^{-8} 3.65×10^8
$2^{1/8}$	1.580 8.03×10^{-5} 516	1.553 3.58×10^{-7} 9.26×10^4	1.539 1.82×10^{-11} 1.70×10^9
$2^{1/32}$	1.656 7.16×10^{-5} 688	1.621 2.43×10^{-7} 1.60×10^5	1.601 6.82×10^{-12} 4.79×10^9

用いたパラメータは Cassini の橙形と同様である．

表 2 を分析する．最小の最大絶対誤差を見ると，いずれも，非常に精度が良く，$n = 16, 32$ のときは方程式の悪条件性も回避できているが，$n = 64$ のときは条件数が大きく，方程式を解くことは難しい．この問題では，電荷点や拘束点の個数を増やしていくと，非常に精度が良くなるが，そのかわりに条件数の増大が著しいという結果が出ている．さらに，問題のパラメータ a と領域拡大率 R_q は反比例の関係にあり、最初に提示した問題とは互いの関係が逆であるが，これは与えられた写像関数の性質であると考えられる．

4.3 実験結果のまとめ

これまでの結果から互いの関係性こそ異なるが，方程式の精度向上には領域拡大率 R_q が高い関係性を持っていることは間違いないとわかる．

本研究では，領域拡大率の数値は特異点の数値に近い値を示しているが，いずれも一致していなかった．しかし，数値実験によって，与えられた問題の特異点と拡大境界は最も精度が良くなる場合において重なるのではないかと推測していた．もしそうならば，領域拡大法が解関数の特異点の検出能力を持ち，電荷の最適配置決定法を定めることができると考える．

5 おわりに

本研究では，電荷の最適配置の観点から，代用電荷法の精度と安定性を向上させることはできないか考察した．

問題のパラメータ a と領域拡大率 R_q は電荷点や拘束点の個数に関係がなく，拡大率の推移は一定であるとわかった．このことから，最適拡大率は解等角写像の何らかの性質を反映すると考えられる．

さらに，Cassini の橙形，対数関数を用いた写像関数で与えられた問題では電荷配置曲線が特異点と重なるようにとった R_q がほぼ最適な拡大率になることがわかった．しかし，実際の問題では解関数の特異点の配置決定法は未知であるため，それを用いて最適な拡大率を決定することはできない．

いくつかの実験では，電荷配置曲線が解関数の特異点と重なったときに電荷分布に特徴的なピークパターンが現れた．この情報から解関数の特異点位置を特定し，最適な領域拡大率を求めることは興味深い課題である．

6 参考文献

[1] 天野要：代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法．情報処理学会論文誌，vol.28，No7，pp.697-704，1987.

[2] 小山田 麻祐子： 代用電荷法による等角写像の計算，南山大学情報理工学部卒業論文，2012.

[3] 永田 友史：代用電荷法による等角写像の研究，南山大学情報理工学部卒業論文，2013.