

# 多重振り子の倒立振り子

2012SE072 伊藤瑞木

指導教員：杉浦洋

## 1 はじめに

多重振り子はとても複雑な動きをし、ほとんど周期性のない行動をし、カオス性を持った動きを見せる。そんな多重振り子の摩訶不思議な運動を制御することができないか、と考えたことがきっかけとなり、研究を始めた。本研究では振り子の運動となる剛体力学について学び、倒立振り子を制御するシュミレーションを行う。その振り子を多関節にし、倒立に制御することを目標とする。

## 2 剛体力学

### 2.1 ニュートンの運動の法則

法則 2.1 運動の第一法則（慣性の法則）

静止または等速度運動をする物体は、外力によってその状態を変えられない限り、その状態を続ける。【 $v=一定$ 】

法則 2.2 運動の第二法則（運動の法則）

$\mathbf{r}$  を質点の動径ベクトルとする。 $\dot{\mathbf{r}}$  は速度、 $\ddot{\mathbf{r}}$  は加速度。物体の加速度は外力  $\mathbf{f}$  に比例し、質量  $m$  に反比例する。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{f}$$

これを特にニュートンの運動方程式という。

法則 2.3 運動の第三法則（作用・反作用の法則）

2つの物体が互いに及ぼしあう力は、大きさが等しく方向は反対である。

### 2.2 質点の力学

定義 2.1  $\mathbf{p}$  : 運動量,  $\mathbf{r}$  : 動径ベクトルとすると, 角運動量 :  $\mathbf{L}$  は,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

と  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{r}$  のベクトル積で表せる。

定義 2.2  $\mathbf{r}$  : 動径ベクトル,  $\mathbf{F}$  : 力とすると,

$\mathbf{N}$  : 力のモーメントは,

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

と表される。

法則 2.4 角運動量  $\mathbf{L}$  と力のモーメント  $\mathbf{N}$  について、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$$

が成り立つ。

### 2.3 質点系の力学

法則 2.5 質点系の全運動量の時間的変化は外力の和に等しい。外力がないときには、全運動量は保存される。

点  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  からなる質点系  $S$  を考える。質点  $\mathbf{r}_j (1 \leq j \leq n)$  の運動量を  $\mathbf{P}_j$  とする。またその質量を  $m_j$  とする。全質量は  $m = \sum_{j=1}^N m_j$  で、重心は  $\mathbf{r}_G = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{r}_j / m$  である。外力を  $\mathbf{F}_j(\mathbf{r}_j)$  にかかる外力) とすれば、質点系の全運動量を  $\mathbf{P}$  とし、 $\mathbf{P} = \sum_{j=1}^N \mathbf{P}_j$  とすると、

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j$$

と書ける。

### 2.4 剛体の簡単な運動

上の質点系  $S$  が剛体であるとは、力が加わっても二点間の距離が不変であることである。剛体の運動は、並進運動と回転運動に分けられる。重心に対する運動方程式（並進運動）は、 $\mathbf{F} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j$  として

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j$$

であり、角運動量に対する運動方程式（回転運動）は、 $\mathbf{L} = \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_j \mathbf{p}_j, \mathbf{N} = \sum_{j=1}^N \mathbf{N}_j$  と定義して、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$$

である。三次元剛体は並進運動の自由度が3、回転運動の自由度が3、あわせて6の自由度をもつ。

定義 2.3 固定軸から質点  $j$  (質量  $m_j$ ) までの距離を  $r_j$  とすると軸のまわりの慣性モーメント  $I$  は

$$I = \sum_{j=1}^N m_j r_j^2$$

で与えられる。

法則 2.6 定義 2.1 で定義 2.3 を用いると、軸のまわりの角運動量は、 $\omega$  を角速度とすると、

$$\mathbf{L} = I\omega$$

となる。これより、回転運動の運動方程式は、

$$I \frac{d\omega}{dt} = \mathbf{N}$$

と書ける。また、剛体が標準の位置からまわった角を  $\theta$  とすれば、

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

であるため、運動方程式は

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathbf{N}$$

とかける。

## 2.5 拘束された運動

物体の運動がある曲線や曲面上に限られているとき、拘束された運動という。振り子のように円上や球面上での運動などがそうである。この運動では、物体にはたらく力として、通常の重力のような外力のほかにその拘束面に制限するためだけにはたらく力  $S$  が加わる。これを拘束力という。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{f} + S$$

となる。

## 3 多重倒立振子の力学モデル

図1の様に  $x$  軸上を動く支点  $\mathbf{x} = (x, 0)$  と  $n$  個の質点  $m_1, m_2, \dots, m_n$  をこの順に、長さ  $l_1, l_2, \dots, l_n$  の質量の無い棒でつないだものを多重倒立振子のモデルとする。支点と質点を関節として、棒は自由な角度を取れるものとする。

質点  $m_i$  の座標を  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) とする。簡単のため、 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{x}$  と約束する。棒  $l_i$  をベクトル  $\overrightarrow{\mathbf{r}_{i-1}\mathbf{r}_i}$  と考えたとき、その  $y$  軸となす角を  $\theta_i$  とする。 $y$  軸となす角が  $\theta$  の単位ベクトルを、

$$\mathbf{e}(\theta) = (\sin \theta, \cos \theta)$$

と書く。また、その  $\theta$  による微分を

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(\theta) &= \frac{d}{d\theta} \mathbf{e}(\theta) = (\cos \theta, -\sin \theta), \\ \mathbf{e}''(\theta) &= \frac{d^2}{d^2\theta} \mathbf{e}(\theta) = (-\sin \theta, -\cos \theta) \end{aligned}$$

と書く。 $\mathbf{e}''(\theta) = -\mathbf{e}(\theta)$  である。

質点の座標  $\mathbf{r}_i$  は次のように表せる。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{x}, \\ \mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_{i-1} + l_i \mathbf{e}(\theta_i) \quad (1 \leq i \leq n). \end{aligned}$$

これを時間  $t$  で微分して、速度は、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_0 &= \dot{\mathbf{x}}, \\ \dot{\mathbf{r}}_i &= \dot{\mathbf{r}}_{i-1} + l_i \dot{\theta}_i \mathbf{e}'(\theta_i) \quad (1 \leq i \leq n). \end{aligned}$$

もう一度時間  $t$  で微分して、加速度は、

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_0 &= \ddot{\mathbf{x}}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_i &= \ddot{\mathbf{r}}_{i-1} + l_i \{ \ddot{\theta}_i \mathbf{e}'(\theta_i) + \dot{\theta}_i^2 \mathbf{e}''(\theta_i) \} \quad (1 \leq i \leq n). \end{aligned}$$

である。

質点  $m_i$  は、重力  $m_i \mathbf{g}$  を受ける。ここで、 $\mathbf{g} = (0, -g)$ 、 $g \cong 9.8$  は重力加速度である。また、棒  $l_i$  から抗力  $\mathbf{S}_i = s_i \mathbf{e}(\theta_i)$  を受ける。さらに、棒  $l_{i+1}$  から抗力  $-\mathbf{S}_{i+1}$  をうける。以上より、質点  $m_i$  が受ける力は、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i &= m_i \mathbf{g} + s_i \mathbf{e}(\theta_i) - s_{i+1} \mathbf{e}(\theta_{i+1}) \quad (1 \leq i \leq n-1), \\ \mathbf{F}_n &= m_n \mathbf{g} + s_n \mathbf{e}(\theta_n) \end{aligned}$$

である。(1), (2) と Newton の公式  $m_i \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) より、多重倒立振子の運動方程式

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i &= m_i \mathbf{g} + s_i \mathbf{e}(\theta_i) - s_{i+1} \mathbf{e}(\theta_{i+1}) \\ &\quad (1 \leq i \leq n-1), \\ m_n \ddot{\mathbf{r}}_n &= m_n \mathbf{g} + s_n \mathbf{e}(\theta_n) \end{aligned} \quad (1)$$

が得られた。

$$\mathbf{e}(\theta_i) \cdot \mathbf{e}(\theta_i) = 1, \mathbf{e}'(\theta_i) \cdot \mathbf{e}(\theta_n) = 0$$

であるから、(1) と  $\mathbf{e}(\theta_i)$  の内積をとり、

$$\begin{aligned} s_i - \mathbf{e}(\theta_i) \cdot \mathbf{e}(\theta_{i+1}) s_{i+1} &= m_i \mathbf{e}(\theta_i) \cdot (\ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{g}) \\ &\quad (1 \leq i \leq n-1), \\ s_n - \mathbf{e}(\theta_i) \cdot \mathbf{e}(\theta_{i+1}) s_{i+1} &= m_n \mathbf{e}(\theta_n) \cdot (\ddot{\mathbf{r}}_n - \mathbf{g}) \end{aligned} \quad (2)$$

また  $\mathbf{e}'(\theta_i)$  の内積をとり、

$$\begin{aligned} m_i (\ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{e}'(\theta_i) &= -s_i + 1 - \mathbf{e}(\theta_{i+1}) \cdot \mathbf{e}'(\theta_i) \\ &\quad (1 \leq i \leq n-1), \\ m_n (\ddot{\mathbf{r}}_n - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{e}'(\theta_n) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

となる。(2) を  $s_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) に関して解き、それを (3) に代入して  $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$  に関する微分方程式を得る。

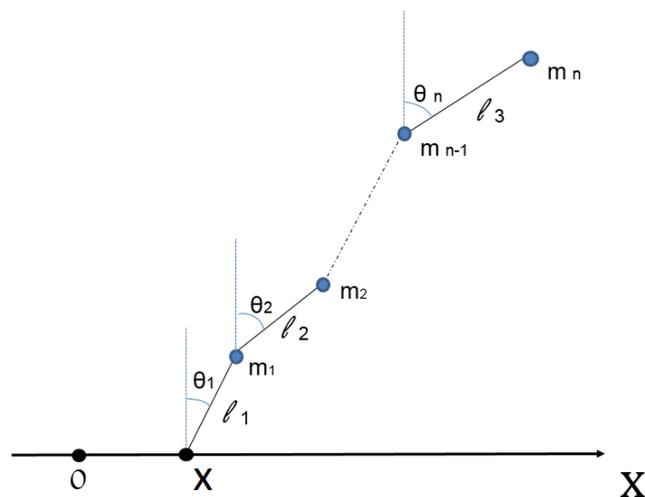


図1 多重振り子

## 4 おわりに

これまでの研究で、剛体力学の基本事項を確認し、多重倒立振子の力学モデルを立てた。今後の課題は倒立振子の制御シミュレーションを行い、多関節による制御を研究していく。

## 参考文献

- [1] 戸田盛和, 物理入門コース『力学』, 岩波書店, 1982 1.
- [2] 十河清, 和達三樹, 出口哲生, 『ゼロからの力学1』 岩波書店, 2005.
- [3] 十河清, 和達三樹, 出口哲生, 『ゼロからの力学2』, 岩波書店, 2005.