

数学的帰納法を用いた証明のシーケントによる理解

2012SE264 上嶋 彩音
指導教員：佐々木 克巳

1 はじめに

本研究の目的は、数学的帰納法を用いた問題の本質を形式的な視点から理解することである。卒業論文では、Smullyan [2]の第I部の第2章「数学的帰納法」の問題(14題)に対して、数学的帰納法を用いた[2]の解を理解し、より丁寧な解とその解に対応するSNK証明図を与えた。

本稿では、第2節で体系SNKを導入し、第3節では、[2]の問題の2つを考察する。

2 シーケント体系SNK

この節では、本研究に用いる体系SNKについて述べる。体系SNKの定義は基本的に文献[1]に従う。本研究では[1]の体系SNKに、数学的帰納法を表すSNK推論規則として

$$\frac{\Gamma \rightarrow P(1) \quad \Gamma \rightarrow \forall k(P(k) \rightarrow P(k+1))}{\Gamma \rightarrow \forall n P(n)}$$

を追加する。ただし、 n と k は正整数を表す変数である。

3 数学的帰納法

この節では、卒業論文で扱った[2]の第2章の『数学的帰納法』の問題14題のうちの問題2.12と問題2.14に対し、数学的帰納法を用いた[2]の解を理解し、より丁寧な解とその解に対応するSNK証明図を与える。

問題 2.12. 男性の無限列 $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ と女性の無限列 $W_1, W_2, \dots, W_n, \dots$ を与えられるとする。次の二つが成立しているとする。

(1) M_1 はすべての女性を愛し、 W_1 はすべての男性に愛されている。

(2) すべての正整数 m と n について、 M_m が W_n を愛し、 M_m が W_{n+1} を愛し M_{m+1} が W_n を愛するのなら、 M_{m+1} は W_{n+1} を愛する。

すべての男性がすべての女性を愛することを証明せよ。

証明. すべての男性が愛する女性を「望ましい」とする。すべての n で W_n が望ましいことを示せばよい。

(i) $n=1$ のとき、(1)より、すべての男性は W_1 を愛するので、 W_1 は望ましい。

(ii) W_n が望ましいと仮定する。 W_{n+1} も望ましいこと、すなわち、すべての m に対して、 M_m が W_{n+1} を愛することを示す。 m についての帰納法を用いる。

(ii-1) (1)より、 M_1 はすべての女性を愛するので W_{n+1} を愛する。

(ii-2) M_m は W_{n+1} を愛すると仮定する。また、帰納法の仮定から W_n は望ましいので、 M_m と M_{m+1} の二人ともに、 W_n は愛される。したがって、 M_m は W_n を愛し、 M_m が W_{n+1} を愛し、 M_{m+1} は W_n を愛する。このことと(2)より、 M_{m+1} は W_{n+1} を愛する。これにより、 M_m は W_{n+1} を愛するのなら、 M_{m+1} は W_{n+1} を愛することが示された。

ゆえに、(ii-1)、(ii-2)より、 W_{n+1} が望ましいことがわかる。これより、 W_n が望ましいなら、 W_{n+1} が望ましいことがわかる。

したがって、(i),(ii)より、すべての男性はすべての女性を愛する。

SNK 証明図. n についての文 $P(n)$ を次のようにおく。

$P(n): \forall m(L(M_m, W_n))$

また、文「 M が W を愛する」を $L(M, W)$ と表す。

$$\frac{\frac{\frac{L(M_1, W_{n+1}) \rightarrow L(M_1, W_{n+1})}{\forall n L(M_1, W_n) \rightarrow L(M_1, W_{n+1})}}{(1) \rightarrow L(M_1, W_{n+1})} \quad \frac{[A] \quad \frac{L(M_{m+1}, W_{n+1}) \rightarrow L(M_{m+1}, W_{n+1})}{P(n), (2), L(M_m, W_{n+1}) \rightarrow L(M_{m+1}, W_{n+1})}}{P(n), (2) \rightarrow \forall m(L(M_m, W_{n+1})) \supset L(M_{m+1}, W_{n+1}))}}{(1), (2), P(n) \rightarrow \forall m(L(M_m, W_{n+1}))}}{\frac{P(1) \rightarrow P(1)}{(1) \rightarrow P(1)}} \quad \frac{(1), (2), P(n) \rightarrow P(n+1)}{(1), (2) \rightarrow \forall n(P(n) \supset P(n+1))}}{(1), (2) \rightarrow \forall n P(n)}$$

[A]

$$\frac{L(M_m, W_n) \rightarrow L(M_m, W_n)}{P(n) \rightarrow L(M_m, W_n)} \quad L(M_m, W_{n+1}) \rightarrow L(M_m, W_{n+1}) \quad \frac{L(M_{m+1}, W_n) \rightarrow L(M_{m+1}, W_n)}{P(n) \rightarrow L(M_{m+1}, W_n)}$$

図 2.12: 問題 2.12 の SNK 証明図

すると、問題 2.12 の条件は次のように表現できる。

- (1) $P(1) \wedge \forall n L(M_1, W_n)$
- (2) $\forall m \forall n ((L(M_m, W_n) \wedge L(M_m, W_{n+1}) \wedge L(M_{m+1}, W_n)) \supset L(M_{m+1}, W_{n+1}))$

証明すべき文は「(1),(2) $\rightarrow \forall n P(n)$ 」で、この SNK 証明図を図 2.12 に示す。

問題 2.14. どこか遠くの世界で、無限冊の本の図書館をもつ皇帝がいる。しかし、その冊数は加算無限でしかなく、本 1, 本 2, ..., 本 n , ... と番号がつけられている。さらに、すべての本は有限ページで、ページ 1, ページ 2, ..., ページ n , ... とページに番号がつけられている。いくつかのページは白紙である。次が成立しているとする。

- (1) 本 1 のページ 1 は白紙である。
 - (2) どの本でも、ページ k が白紙ならば、ページ $k+1$ も白紙である。
 - (3) すべての n について、もし本 n のすべてのページが白紙であるならば、本 $n+1$ のページ 1 も白紙である。
- この図書館で本を無作為に選んで無作為にページを開けて見たとする。何かが印刷されている確率は？

解. 0%

証明. n についての文 $P(n)$ と n, k についての文 $B(n, k)$ を次のようにおく。

$P(n)$: 本 n のすべてのページが白紙

$B(n, k)$: 本 n のページ k が白紙

$\forall n P(n)$ を自然数 n についての帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき、 $P(1)$, すなわち、 $\forall k B(1, k)$ を k についての帰納法で示す。

(i-1) $B(1, 1)$ は (1) より明らかである。

(i-2) (2) より、すべての k について、 $B(1, k)$ ならば $B(1, k+1)$ である。

(i-1), (i-2) より $P(1)$ は成立する。

(ii) $P(n)$ を仮定する。すると、(3) により $B(n+1, 1)$ である。また、(2) より、任意の k について、 $B(n+1, k)$ は $B(n+1, k+1)$ を帰結する。したがって、(i) と同様に、 k についての帰納法により $\forall k B(n+1, k)$ すなわち $P(n+1)$ は成立する。したがって、(i), (ii) より、 $\forall n P(n)$ が示された。よって、どの本のどのページでも白紙であることがわかるので、確率は 0% である。

SNK 証明図. 問題 2.14 の条件は次のように表現できる。

- (1) $B(1, 1)$
- (2) $\forall n \forall k (B(n, k) \supset B(n, k+1))$
- (3) $\forall n (P(n) \supset B(n+1, 1))$

証明すべき文は「(1),(2),(3) $\rightarrow \forall n P(n)$ 」で、この SNK 証明図を図 2.14 に示す。

4 おわりに

本研究を通して、形式体系をすることにより数学的帰納法の証明の筋道が分かるようになった。それにより今まで理解できなかったところが明確になり、問題に対してより深い理解を得ることができた。

参考文献

- [1] 佐々木克巳：「シークエント体系の証明図から実証明を作る方法」，アカデミア情報理工学部編第 11 巻，南山大学，pp. 34-55, 2011
- [2] Raymond Smullyan 著，高橋昌一郎監訳，村上祐子訳：『数理論理学 述語論理と完全性定理』，丸善，東京，2014

$$\begin{array}{c}
 \frac{B(1, k) \rightarrow B(1, k) \quad B(1, k+1) \rightarrow B(1, k+1)}{B(1, k) \supset B(1, k+1), B(1, k) \rightarrow B(1, k+1)} \\
 \frac{B(1, 1) \rightarrow B(1, 1) \quad \forall n \forall k (B(n, k) \supset B(n, k+1)) \rightarrow \forall k (B(1, k) \supset B(1, k+1))}{(1), (2) \rightarrow \forall k (B(1, k))} \\
 \frac{(1), (2) \rightarrow \forall k (B(1, k))}{(1), (2) \rightarrow P(1)} \quad [A] \\
 \hline
 (1), (2), (3) \rightarrow \forall n P(n)
 \end{array}$$

[A]

$$\begin{array}{c}
 \frac{B(n+1, k) \rightarrow B(n+1, k) \quad B(n+1, k+1) \rightarrow B(n+1, k+1)}{(2), B(n+1, k) \rightarrow B(n+1, k+1)} \\
 \frac{B(n+1, 1) \rightarrow B(n+1, 1) \quad (2) \rightarrow \forall k (B(n+1, k) \supset B(n+1, k+1))}{(2), B(n+1, 1) \rightarrow P(n+1)} \\
 \frac{P(n) \rightarrow P(n) \quad (2), B(n+1, 1) \rightarrow P(n+1)}{(2), \forall n (P(n) \supset B(n+1, 1)), P(n) \rightarrow P(n+1)} \\
 \hline
 (1), (2), (3) \rightarrow \forall m (P(m) \supset P(m+1))
 \end{array}$$

図 2.14: 問題 2.14 の SNK 証明図