魔術師の論理的魔術のパズル

2012SE181 庭野　元来

指導教員：佐々木　克巳

1　はじめに

私は，3 年次に学んだ真理値表で解く論理パズルが苦手であったので，それを少しでも理解し克服するために，論理パズルを研究課題として決めた．

本研究の目的は，スマリヤン[2]にある論理パズルを，真理値表を用いて整理し，考察することである．具体的には，[2]の PART1 の「嘘つきは誰だ!」，「魔術師の回想」，「アナベル姫誘拐事件」の問題について考察し，卒業論文では，その一部に対し，真理値表を用いた解を与えた．本稿では，そのうちの 4 つの問題に対し，真理値表を用いた解を与える．

本稿では，論理記号として，¬（～でない），≡（同値），⇒（ならば），∧（かつ）の 4 つを用い，2 つの真理値「真」，「偽」を，それぞれ，「○」，「×」と表す．

2　騎士と奇人

この節では，[2]の 4 つの問題に対し，真理値表を用いた解を与える．

これらの問題は，さまざまな人物が 1 つの島を訪れ，そこで起こる難問奇問を解決していくものである．その前提条件を以下にあげる．

- 本稿における，島の住民は騎士か奇人である．
- 騎士は，常に本当のことを話す．
- 奇人は，常に偽りのことを話す．

上の前提条件から，以下の性質が導かれる．証明は[1]の P.20 のノート 1.4 と同様にできるが，本稿でも，それを説明しておく．

性質 1. A が P と発言した ⇒「A が騎士である≡P」

証明. A が P と発言したとする．前提条件から以下の(1), (2)がいえる．

$$\text{A が騎士} \Rightarrow \text{P} \quad (1)$$

$$\text{A が奇人} \Rightarrow \text{P でない} \quad (2)$$

(2)の対偶をとると，

$$\text{P} \Rightarrow \text{「A が奇人」でない}$$

であり，A は騎士か奇人であるから，

$$\text{P} \Rightarrow \text{A が騎士} \quad (3)$$

である．(1), (3)より，

$$\text{A が騎士である} \equiv \text{P}$$

である．

以下，4つの問題と，その解答を示す．問題は，基本的には[2]の表現で示すが，解答に不要な部分は削除したり，必要な部分の表現を変更したりしている．解答は，K(A)を

$$\text{K(A)：A は騎士である}$$

とおいて記述する．

問題 2.1. ある旅行者が 3 人の住人アンソニー，バードランド，クライブに会った．

旅行者はその 1 人に聞いた．「あなたは騎士ですか，それとも奇人ですか？」アンソニーが答えたが，聞いたことのない言葉でわからなかった．そこで，彼はバードランドに，アンソニーが何と言ったのか聞いた．バードランドは答えた．「アンソニーは「自分は奇人だ」と言ったのさ」そこへ，クライブが割り込んだ．「バードランドの言うことは信じない方がいいよ．彼は嘘を言っているから」．その旅行者は，クライブがどちらのタイプ（騎士か奇人）かひらめいた．きみは，クライブが騎士か奇人かわかるかな？

真理値表を用いた解， アンソニー，バードランド，クライブを，それぞれ，A, B, C とおく．

C の発言と，性質 1 より

$$K(C) \equiv \neg K(B) \quad (*1)$$

が成り立つ.次に B の発言を考える．B の発言を P(B)とおくと，性質 1 より

$$K(B) \equiv P(B) \quad (*2)$$

が成り立つ．また P(B)の内容を考えると，性質 1 より

$$P(B) \Rightarrow (K(A) \equiv \neg K(A)) \quad (*3)$$

も成り立つ．(＊2)と(＊3)より

$$K(B) \Rightarrow (K(A) \equiv \neg K(A) \quad (*4)$$

が成り立つ．

さて，(＊1)と(＊4)の真理値表は表 2.1 のようになる．

表 2.1：(＊1), (＊4)の真理値表

K(B)	K(C)	K(C)≡¬K(B)	K(B)	⇒	K(A)≡¬K(A)
○	○	×	○	×	×
○	×	○	○	×	×
×	○	○	×	○	×
×	×	×	×	○	×

(＊1)と(＊4)が成り立つことから，表 2.1 において，(＊1)と(＊4)がどちらも真となる行，すなわち 3 行目が解となる．よって，B は奇人で C は騎士であることがわかる．すなわち，クライブは騎士である．

問題 2.2. 2 人の人物に出くわした．1 人は緑色の帽子をかぶり，もう 1 人は，同じような青色の帽子をかぶっていた．1 人が占星術師で，もう 1 人が魔術師であるかはわかっているが，どちらが占星術師で，どちらが魔術師なのかわからない．そこで尋ねた．「魔術師は騎士でしょうか？」

青い帽子の方が，この質問に答えた（答えは「はい」か「いいえ」である）．このとき，どちらが魔術師か判断できたのである．はたして，どちらが魔術師なのか？

真理値表を用いた解. 緑の帽子，青の帽子の住民をそれぞれ A, B とし，M(A), P，を次のようにおく．

M(A)：A は魔術師である．

P：魔術師は騎士である．

質問「P であるか？」に対して B が「はい」と答えた場合，性質 1 より

$$K(B) \equiv P \qquad (*1)$$

が成り立つ. (＊1)の真理値表は表 2.2 のようになる.

表 2.2：(＊1)の真理値表

K(A)	K(B)	M(A)	K(B)	≡	P
○	○	○	○	○	○
○	○	×	○	○	○
○	×	○	×	×	○
○	×	×	×	○	×
×	○	○	○	×	×
×	○	×	○	○	○
×	×	○	×	○	×
×	×	×	×	○	×

表 2.2 において, (＊1)が真である行は, 3, 5 行目以外の 6 行である. この 6 行では魔術師が A と B の場合が出てきてしまい答えが導けない.

次に，質問「P であるか？」に対して B が「いいえ」と答えた場合，性質 1 より

$$K(B) \equiv \neg P \qquad (*2)$$

が成り立つ. (＊2)の真理値表は表 2.3 のようになる.

表 2.3：(＊2)の真理値表

K(A)	K(B)	M(A)	K(B)	≡	¬P
○	○	○	○	×	×
○	○	×	○	×	×
○	×	○	×	○	×
○	×	×	×	×	○
×	○	○	○	○	○
×	○	×	○	×	×
×	×	○	×	×	○
×	×	×	×	×	○

表 2.3 において, (＊2)が真であるところが 3, 5 行目である. このことから魔術師は A であることがわかる.

以上のことと, 「B の回答から魔術師がどちらかがわかった」ことから，魔術師が騎士か奇人かに関わらず, B が「いいえ」と答え，魔術師は A，すなわち，緑の帽子をかぶった者であるとわかる.

問題 2.3. 3 人の集団に出会った. 彼らの名前は，アーサー，バーナード，チャールズである. まずアーサーに尋ねた. 「バーナードとチャールズは 2 人とも騎士ですか？」

「そのとおり」とアーサーは答えた.

次に聞いた. 「バーナードは騎士ですか？」

「いや違う」とアーサーは答えた.

チャールズは騎士だろうか，それとも奇人だろうか？

真理値表を用いた解, アーサー，バーナード，チャールズをそれぞれ, A, B, C とおく.

A の 1 つ目の質問への回答と，性質 1 より

$$K(A) \equiv K(B) \wedge K(C) \qquad (*1)$$

が成り立つ. A の 2 つ目の質問への回答と，性質 1 より

$$K(A) \equiv \neg K(B) \qquad (*2)$$

が成り立つ. (＊1), (＊2)の真理値表は表 2.4 のようになる.

表 2.4：(＊1), (＊2)の真理値表

K(A)	K(B)	K(C)	K(A)≡ K(B)∧K(C)	K(A)≡ ¬K(B)
○	○	○	○	×
○	○	×	×	×
○	×	○	×	○
○	×	×	×	○
×	○	○	×	○
×	○	×	○	○
×	×	○	○	×
×	×	×	○	×

(＊1), (＊2)より，表 2.4 において 2 つの同値性がどちらも真となる行，すなわち 6 行目が解となる. したがって, A は奇人, B は騎士, C は奇人である.

問題 2.4, ある住人に出会った. その住人が「わたしは独身の騎士である」と言った. このとき，彼は騎士であるか奇人であるか，そして，彼は結婚しているか，わかるかな？

真理値表を用いた解. その住人を A とおく. また, S(A)を以下のようにおく.

S(A)：A は独身である.

A の発言と性質 1 より

$$K(A) \equiv K(A) \wedge S(A) \qquad (*1)$$

が成り立つ. (＊1)の真理値表は表 2.5 のようになる.

表 2.5：(＊1)の真理値表

K(A)	S(A)	K(A)	≡	K(A)∧S(A)
○	○	○	○	○
○	×	○	×	×
×	○	×	○	×
×	×	×	○	×

表 2.5 において，(＊1)が真であるところが 1, 3, 4 行目である. このことから独身の騎士，既婚の奇人，独身の奇人がこの発言をできることがわかる. 以上のことから，彼が結婚しているかはわからない.

なお，表 2.5 より, 「もし彼が騎士なら，彼は独身である」はわかる.

3 おわりに

本研究では，真理値表を用いて解を与えることで問題の解きやすさから問題の解を出すことができた. [2]の解法は文章であり，文章量が多く理解に苦しみ，イメージしづらく，論理的に表でまとめる方が理解しやすかった.

参考文献

[1] 小野 寛晰：「情報科学における論理」，日本評論社, 東京, 1994

[2] レイモンド・スマリヤン：「スマリヤンの無限の論理パズル ゲーデルとカントールをめぐる難問奇問」，白揚社，東京, 1990