シークエントを用いた決定問題の発見的解法

2012SE017 藤吉　章

指導教員：佐々木　克巳

1　はじめに

本研究の目的は，様々な決定問題の解を導く手順をシークエントで表現し，解法のパターンや公式・定理を使用する動機を発見することである．このテーマを選んだ理由は，高等学校の数学の教員を志望するにあたって，数学の更なる理解や確かな学力の定着を促す指導に活かしたいと考えたことである．解を導く手順をシークエントで表現する理由は，3 年次に学習したシークエント体系の経験から，シークエントでの表現によりその手順の順序が明確になると考えたことである．

卒業論文では，具体的な決定問題に対し，その発見的解法をシークエント体系を用いて考察した．その決定問題は数研出版 [1] の第 3 章第 2 節「三角比への応用」から 4 問と，その範囲の数研出版 [5] から 1 問を抽出した．

本稿では，まず，次の 2 節で佐々木 [2] で紹介している決定問題のためのシークエント体系 **S** を説明する．そして，3 節で，卒業論文で扱った 1 つの決定問題の解法の考察を示す．

2　シークエント体系 S

この節では，[2] の決定問題のためのシークエント体系 **S** を導入する．

S の基本単位は

$$t_1, \cdots, t_m, P_1, \cdots, P_n \to P \qquad (*1)$$

または

$$t_1, \cdots, t_m, P_1, \cdots, P_n \to t \qquad (*2)$$

の形の表現である．ここで，$t_1, \cdots, t_m, t$ は項 (いわゆる式)，$P_1, \cdots, P_n, P$ は述語である．また，記号 $\to$ の左側の順番が異なるものも，上の表現としては同じとみなす．体系 **S** では，この表現をシークエントといい，$\to$ の左側の列を左辺，右側を右辺という．以後，シークエントの左辺のように，項と述語で構成される列を Γ などの記号で表す．

上のシークエント $(*1)$ と $(*2)$ の解釈は，それぞれ，

- $t_1, \cdots, t_m$ の値がわかり，$P_1, \cdots, P_n$ が成り立つとき，P が成り立つ
- $P_1, \cdots, P_n$ が成り立つとき，t を $t_1, \cdots, t_m$ の式で表現できる

である．

S の公理と推論規則は以下である．

S の公理：

$$P, \Gamma \to P \qquad \text{および} \qquad t_1, \cdots, t_m, P_1, \cdots, P_n, P \to t$$

ただし，P は $t, t_1, \cdots, t_m$ のみが現れる等式である．

S の推論規則：佐々木 [3] で紹介されている体系 **LKP** の推論規則（ただし，(w 左) は，主論理式が既知の性質のときのみ）に以下の 3 つの推論規則を追加する．

$$\frac{\Gamma \to t \quad t, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta}\ (cut)$$

$$\frac{s, \Gamma \to t \quad t, \Gamma \to s}{\Gamma \to s}\ (cut)$$

$$\frac{P, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta}\ (cut)$$

ただし，P は既知の性質である．

S の証明図と **S** の証明可能性は，上の **S** の公理と **S** の推論規則により，ふつうの方法で定義する．ふつうの方法とは，例えば，[3] などで用いられている方法である．

LKP 証明図に現れる各推論規則において，上式の左辺では下式左辺の部分列を“$\uparrow$”で表し，上式右辺と下式右辺が一致するとき，上式右辺を“$\downarrow$”で表してもよいとする．

3　解法の考察

この節では，[1] の P.151 の応用例題 4 の (2),(3) の解法を考察する．[1] では，応用例題 4 の前のページに例題 15 があり，そこでは△ ABC において，次の公式を導いている：

$$\triangle\ \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \cdot \sin \angle \mathrm{B} \qquad (*)$$

この節では，$(*)$ をどのように応用して応用例題 4 を解くのか，その解法をシークエントで表現して考察する．

応用例題 4([1]).

円に内接する四角形 ABCD において，

$$\mathrm{AB}=5, \mathrm{BC}=4, \mathrm{CD}=4, \angle \mathrm{B} = 60^\circ$$

とする．次のものを求めよ．

(1)AC の長さ (2)AD の長さ (3) 四角形 ABCD の面積

(1) は，余弦定理を用いて求める．卒業論文には解法の考察を示したが，本稿では省略する．

(2) の目標は，与えられた条件の下で，問題で与えられた値と (1) で求めた AC の値から，AD の長さを求めること，すなわち，

$$\mathrm{AB,BC,CD,AC,\angle B,AD}>0,$$
$$\text{四角形 ABCD は円に内接する} \to \mathrm{AD}$$

を示すことである．

(1) で AC を求めたことで，四角形 ABCD に対角線 AC が意識されて，四角形 ABCD が△ ABC と△ ACD から構成されていることに気づく．

そこで，辺 AD を含む△ ACD に着目して余弦定理

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{CD}^2 - 2 \cdot \mathrm{AD} \cdot \mathrm{CD} \cdot \cos\angle\mathrm{D}$$

を用いると，新たな未知数である $\cos\angle\mathrm{D}$ を求める必要がある．つまり，

$$\angle\mathrm{B}, \text{四角形 ABCD は円に内接する} \to \cos\angle\mathrm{D}$$

を示す必要がある．

次に，$\angle\mathrm{D}$ の大きさを求めることによって $\cos\angle\mathrm{D}$ の値は 1 つに決まるので，直接 $\cos\angle\mathrm{D}$ の値を求めるのではなく，$\angle\mathrm{D}$ の大きさを求めることにする．つまり，

$$\angle\mathrm{B}, \text{四角形 ABCD は円に内接する} \to \angle\mathrm{D}$$

を示すことにする．

[1] では，問題文のすぐ下に解説があり，その解説で「∠B+∠D=180° であることを利用して $\cdots$」のように述べているが，なぜこのことを利用してよいのか確認しなければならない．数研出版 [6] の P.106 を確認すると，次の性質がある．

円に内接する四角形の性質．

円に内接する四角形の対角の和は 180°である．

この性質と，四角形 ABCD は円に内接することから，「∠B+∠D=180°」を利用することができる．四角形 ABCD は円に内接していて，問題より ∠B の大きさは与えられているので ∠D を求めることができる．

上の解法を **S** の証明図で表現すると，図 1 のようになる．ただし，P は「四角形 ABCD は円に内接する」を表す．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{F} \quad \angle\mathrm{D} \to \cos\angle\mathrm{D}}{\uparrow \to \cos\angle\mathrm{D}}\,(cut) \qquad \uparrow, \cos\angle\mathrm{D} \to \mathrm{AD}}{\uparrow, \mathrm{AC}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{CD}^2 - 2 \cdot \mathrm{AD} \cdot \mathrm{CD} \cdot \cos\angle\mathrm{D} \to \mathrm{AD}}\,(cut)}{\mathrm{AB}, \mathrm{BC}, \mathrm{CD}, \mathrm{AC}, \angle\mathrm{B}, \mathrm{AD} > 0, P \to \mathrm{AD}}\,(cut)$$

$\mathcal{F}$：

$$\dfrac{\dfrac{P \to P \quad \angle\mathrm{B}, \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{D} = 180^\circ \to \angle\mathrm{D}}{\uparrow, P \supset \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{D} = 180^\circ \to \angle\mathrm{D}}\,(\supset \text{左})}{\angle\mathrm{B}, P \to \angle\mathrm{D}}\,(cut)$$

図 1　応用例題 4 の (2) の解法に対する **S** の証明図

(3) の目標は，与えられた条件の下で，問題で与えられた値，(1) で求めた AC の値，(2) で求めた AD と ∠D の値から，四角形 ABCD の面積を求めることである．つまり，

$$\mathrm{AB},\mathrm{BC},\mathrm{CD},\mathrm{AC},\mathrm{AD},\angle\mathrm{B},\angle\mathrm{D}, \text{四角形 ABCD は円に内接する} \to S$$

を示すことである．ただし，S は四角形 ABCD の面積を表すとする．

(2) でも考えたように，四角形 ABCD は△ ABC と△ ACD から構成されていることから，最初に，△ ABC の面積を求めることを考える．つまり，

$$\mathrm{AB},\mathrm{BC},\mathrm{CD},\mathrm{AC},\mathrm{AD},\angle\mathrm{B},\angle\mathrm{D} \to \triangle\ \mathrm{ABC}$$

を示すことを考える．

ここで，例題 15 の公式 $(*)$ を用いることによって，△ ABC の面積を求めることができ，その右辺に未知数はない．

次に，△ ACD の面積を求めることを考える．つまり，

$$\mathrm{CD},\mathrm{AD},\angle\mathrm{D} \to \triangle\ \mathrm{ACD}$$

を示すことを考える．

△ ABC のときと同様に，三角形の面積の公式

$$\triangle\ \mathrm{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AD} \cdot \mathrm{CD} \cdot \sin\angle\mathrm{D} \qquad (**)$$

を用いることによって，△ ACD の面積を求めることができ，その右辺に未知数はない．

上の解法を **S** の証明図で表現すると，図 2 のようになる．

$$\dfrac{\dfrac{\mathcal{F} \qquad \dfrac{\dfrac{\uparrow, (**) \to \triangle\ \mathrm{ACD}}{\uparrow \to \triangle\ \mathrm{ACD}}\,(cut) \qquad \uparrow, \triangle\ \mathrm{ACD} \to S}{\uparrow, \triangle\ \mathrm{ABC} \to S}\,(cut)}{\uparrow, S = \triangle\ \mathrm{ABC} + \triangle\ \mathrm{ACD} \to S}\,(cut)}{\mathrm{AB}, \mathrm{BC}, \mathrm{CD}, \mathrm{AC}, \mathrm{AD}, \angle\mathrm{B}, \angle\mathrm{D}, P \to S}\,(cut)$$

$\mathcal{F}$：

$$\dfrac{\uparrow, (*) \to \triangle\ \mathrm{ABC}}{\mathrm{AB}, \mathrm{BC}, \mathrm{CD}, \mathrm{AC}, \mathrm{AD}, \angle\mathrm{B}, \angle\mathrm{D}, P \to \triangle\ \mathrm{ABC}}\,(cut)$$

図 2　応用例題 4 の (3) の解法に対する **S** の証明図

この考察では，三角形の面積の公式 $(*)$ と，円に内接する四角形の性質を用いた．そして，目標としている各シークエントに対し，これらの性質をどのように用いるかを考えることで，解に向かって手順を進めている．必要な性質を理解していることに加え，各状況における目標のシークエントを意識することが決定問題の解を導くことに有効であると感じた．

参考文献

[1] 大島利雄　他 13 名，『数学I』，数研出版株式会社，東京，2012

[2] 佐々木克巳，『卒業研究 II 講義資料　決定問題のためのシークエント体系』，南山大学，2015

[3] 佐々木克巳，『2015 年度数理論理学講義資料』，南山大学，2015

[4] 佐々木克巳，「証明の構想を表現する新しい図式の提案」，数学教育学会誌，2015 年度数学教育学会春季年会発表論文集，数学教育学会，2015，pp.208–210

[5] チャート研究所，『改訂版　チャート式　基礎からの数学I』，数研出版株式会社，東京，2009

[6] 坪井俊　他 16 名，『数学 A』，数研出版株式会社，東京，2010

[7] G. ポリア（柴垣和三雄・金山靖夫　訳），『数学の問題の発見的解き方 2』，みすず書房，東京，1967