分けられる品物・分けられない品物の公正な分割

2012SE142 丸井寛也

指導教員：小藤俊幸

1 はじめに

世の中には，品物を 2 者間で分け合わなければならない様々な対立状態がある．離婚時の財産分与，企業が合併する際に生じる理念の衝突などは，その典型的な例である．

一般的には，弁護士や相談役を通した協議によって互いの取り分が確定する．だが，得られた両者の満足度が平等であるか，そして両者が最大限の利益を得ているかは，確かではない．数学的な手法を用いて，公平かつ効率的な分割を実現することはできないだろうか．

本研究では，数理計画の手法を用いて，2 つの対立する組織や人間が品物を公正に分割する方法を探ることを目的とする．なお，研究にあたっては，文献 [1] を参考にした．

2 前提条件

分割すべき品物に対して，対立する両者には，それぞれの価値がある．本研究では，この「価値」のどれだけを受け取るかを，満足度の尺度とする．

以上により，問題の前提条件を以下のように定める．

- 複数の品物を分割する必要がある．
- 各々が 1 つ 1 つの品物に対して重要性の価値をもっている．
- 両者の満足度は，受け取った品物の価値の合計とする．

3 公正な分割

本研究では，公平かつ効率的な分割を導き出すことを目的としている．また，両者が納得する分割では，それぞれの価値のうち，「得る価値の割合」は「失う価値の割合」よりも高い．

以上により，「公正である」ことの条件を，以下の 3 つの性質に基づいて定める．

公平性

両者が受け取る価値の差が小さい．

効率性

少なくとも一方の得る価値を高める状況が残っていない (パレート効率性).

比率性

両者は少なくとも 50 %以上の価値を受け取る．

4 分けられない品物の分割

すべての品物が「分けられない」と仮定すれば，分割結果は離散的な性質をもつので，ナップサック問題として解くことができる．

Ann と Ben は離婚の折，財産分与として 5 つの品物を分ける．各品物に対する両者の価値を数値化したものを，以下の表に示す.

表 1 各品物に対する Ann と Ben の価値

品物	Ann	Ben
退職金	50	40
家	20	30
コテージ	15	10
有価証券	10	10
その他	5	10
合計	100	100

品物を受け取るか受け取らないかを 0-1 変数で定義し，目的と制約条件を次のように定める．

- Ann と Ben のそれぞれが受け取る価値の差を最小化することを目的とする．(公平性)
- 各品物は必ず Ann か Ben のいずれかが受け取る．(効率性)
- Ann と Ben は，各品物に対する価値の総和のうち，50 %以上を得る．(比率性)

Ann，Ben の得る価値の合計をそれぞれ V_1，V_2とすれば，目的関数は $minimize\,|V_1 - V_2|$ と表せる．

Microsoft Excel のソルバーを用いて問題を解いたところ，Ann が「退職金」と「その他」を受け取ることで，価値の 55 %を得，Ben が「家」「コテージ」「有価証券」を受け取ることで，価値の 50 %を得る分割が得られた．

2 人とも価値の 50 %以上を受け取っており，5 つの品物はすべて分配され，なおかつ 2 人が得た価値の差も決して大きくない．

5 分けられる品物

Ann と Ben の例題において，前節では Ann がすべて受け取っていた「退職金」を，95 %を Ann が受け取り，5 %を Ben が受け取るように分ける．すると，Ann と Ben のそれぞれが受け取る価値の和は共に 52.5 %となり，前節よりも公平性の高い分割が得られる．このように，「分けられる品物」が 1 つの場合は，容易に公平性を調節することができる．

このように，「分けられる品物」の分割結果は連続的な性質をもっているため，複数の分けられる品物を含む品物群を分割するには，離散的な性質と連続的な性質の両方を考慮しなければならない．

6 分けられる品物・分けられない品物の分割

以下の表にある 5 つの品物の分割について考える．品物の番号の後ろに続く文字は，それぞれ (D):分けられる

(divisible)，(I):分けられない (indivisible) を示す．分けられない品物・分けられない品物の両方を含んでいるので，この問題は離散的な性質と連続的な性質をもつ複合問題である．

表 2　各品物に対する価値

品物	A	B
1(D)	10	30
2(D)	10	20
3(I)	35	18
4(I)	30	20
5(I)	15	12
合計	100	100

表 3　分けられる品物の価値

品物	A	B
1(D)	10	30
2(D)	10	20
合計	20	50

「分けられる品物」は、品物 1 と品物 2 の 2 つである．まずは分けられる品物のみの分け方を考える．

A が受け取る価値を x 軸，B が受け取る価値を y 軸に取って，それぞれが受け取る価値の範囲を座標平面上に図示する (図 1)．

同様に，分けられない品物についても座標平面上に図示する (図 2)．

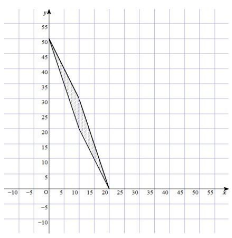

図 1　分けられる品物

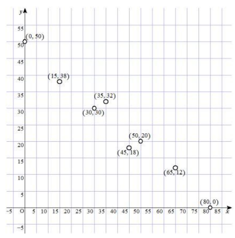

図 2　分けられない品物

2 つの図を合わせることで，両者が受け取る価値の組合せが図示できる (図 3)．

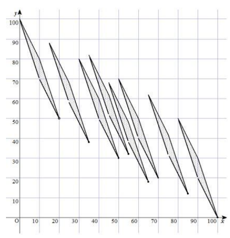

図 3　分割後の価値の組合せ

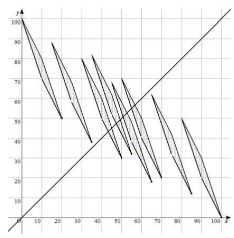

図 4　$y = x$ を加えた図

この図と $y = x$ の共有点にあたる組合せが，最も公平性の高い分割である (図 4)．この例では，A が品物 3，品物 5 と品物 2 の 2/3 を受け取り，B が品物 1，品物 4 と品物 2 の 1/3 を受け取り，両者が価値の 56.67 %を受け取る結果となる．

この分割は，完全に公平な分割の中で最も効率性が高い．公平性を最も重要視するなら，これが最適な分割である．

ここで，当てはまる分割のすぐ右上に，A が 65 %，B が 62 %を受け取る (A が品物 3 と品物 4，B が品物 1，品物 2 と品物 5 を受け取る) ことを示す点が存在する．効率性を重視して考える場合は，これが最適な分割である．前述の分割に比べて公平性では劣るが，両者とも高い利益を得ているので，これが最適な分割であるといえる．

以上により，比率性が満たされることを前提とし，条件の優先度を以下のように定める．

公平性 < 効率性

したがって，以下の手順で得られる分割を「公正な分割」とする．

- 分けられる品物，分けられない品物の分割を別々に図示する．
- 2 つの図を利用して，最終的な分割を図示する．
- 直線 $y = x$ との交点から，公平な分割のうち両者が受け取る価値が最も高い分割を求める．
- さらに両者の得る価値が高い分割のうち，直線 $y = x$ に距離が最も近い分割を求める．

分けられる品物の個数が増えた場合も，C 言語のプログラムなどを用いて領域を座標平面上に図示すれば，この手順で公正な分割を求めることができる．以下に示した図は，前節の例題について，品物 3 までを「分けられる品物」とした場合の領域である．1 %刻みで 1000000 通りの座標を出力して図示した．

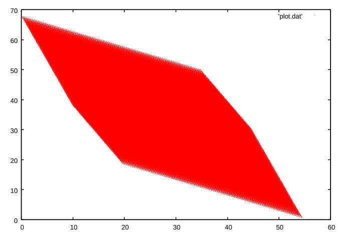

図 5　3 つの分けられる品物の分割

7　おわりに

座標平面上に領域を図示する手法を用いて，離散的な分割結果と連続的な分割結果を関係づけることによって，「分けられる品物」を含む問題についても，最適な分割を導き出すことができた．さらに，プログラムを利用して分割を列挙する方法によって，分けられる品物が増えたとしても，問題の解決にあたることができるようになり，現実の問題への利用も現実的になった．

今後も数学が社会に役立つ事例や手法を研究し，より価値のある学習を行って，精進していきたい．

参考文献

[1] Alexander Rubchinsky：Brams-Taylor model of fair division for divisible and indivisible items. Mathematical Social Science，Vol.60，2010，pp.1-14.

[2] 福島雅夫：『数理計画入門』．朝倉書店，1996.