高校数学における行列の扱い

2012SE057 稲葉ひかり

指導教員：小藤 俊幸

1　はじめに

2012 年, 日本の高等学校の学習指導要領が改訂された. その中で, 今回注目したのが数学 C の行列である.

本研究では, 行列の導入時と私自身が学んでいた最後の時期の内容や教科書, さらには現在も行列が学ばれている韓国の例もあげて比較し, 扱いの違いを調べ, 高校数学における行列の存在について考察していく.

2　学習指導要領に置ける違い

行列の導入は 1970 年の改訂時である. 当時は数学 IIB で高校 2 年生で学ばれていた. 内容は以下に示す.
〔1．行列〕行列の意味, 行列の加減と実数倍, 行列の乗法, 乗法の性質
〔2. 逆行列と連立 1 次方程式〕逆行列, 連立 1 次方程式
〔3.1 次変換〕1 次変換の意味,1 次変換の性質,1 次変換の合成と逆行列, 行列の演算と群
また，行列が最後に学ばれていたのは，私自身が学習していた 1999 年の改訂時である. この時は数学 C で理系の高校 3 年生で学ばれていた. 内容を以下に示す.
〔1. 行列〕行列とその演算, 行列の積と逆行列
〔2. 行列の応用〕連立 1 次方程式, 点の移動

3　教科書の違い

東京書籍が出版する教科書をもちいて，導入時と最後 (以下「数 IIB」と「数 C」) の内容の比較をしていく.

3.1　行列

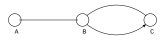
数 IIB は理系文系問わず学習していたため，全体的に，何に利用されているのか，行列とはどういうものなのかをイメージしやすくなっている.
行列の演算 (行列の加法・減法・実数倍・乗法) の説明では１つ１つ日常的な実際問題をとりいれている.

町＼月	4〜6	7〜9	10〜12	1〜3
P町	1018	1222	1065	1125
Q町	778	918	877	807

上の表はＰ・Ｑ町における電力使用量を調べたものである. 毎年比較を行うには数値だけを空欄にした表を用意し、書き込めばよい. 数値だけを取り出せば 8 個の数の長方形状の配列になる. その両側をかっこで囲んで表すと下記のような行列になる.

$$\begin{pmatrix} 1018 & 1222 & 1065 & 1125 \\ 778 & 918 & 877 & 807 \end{pmatrix}$$

また行列の説明の部分では，グラフと行列も書かれている. 下の図のように A，B，C の 3 地点をつなぐ道路を例とし，それぞれの出発地点と到着地点への道が何通りあるか数え行列でまとめている.

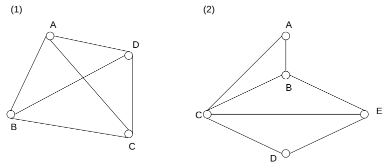


以下が列を到着地点，行を出発地点として行列で表したものである.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4　韓国の行列

韓国では数 I で高校 2 年生のときに学習されている. 単元は，行列の演算，逆行列と連立 1 次方程式，グラフと行列である. 行列の演算，逆行列と連立 1 次方程式に関しては日本のものとほとんど変わりはない. しかし教科書の作り方は日本の導入時と近く，日常の実際問題を具体例として多く載せている. そして，数 IIB で導入例としてあげられていたグラフと行列が 1 つの節で学習されている. 実際に載っている問題を以下に示す.
問. 次のグラフを行列で表せ



5　考察

それぞれの教科書の比較をしたところ, 数 IIB の方が文系も学習することもあり, 数 C に比べ具体例が多く使われ, 行列というものを学習しやすく感じる. 行列の加法の部分を例にあげてみてみると,
数 IIB: 以下の表は,A,B 工場における製品 P,Q,R の 4,5 月の生産量について調べたものである

4 月	P	Q	R
A 工場	5.7	2.4	1.7
B 工場	8.5	4.3	2.8

5 月	P	Q	R
A 工場	6.0	2.2	2.0
B 工場	8.2	4.5	3.0

4 月と 5 月のそれぞれの製品の合計生産量を調べると

4 月・5 月	P	Q	R
A 工場	11.7	4.6	3.7
B 工場	16.7	8.8	5.8

すなわち 4 月と 5 月の生産量を表す 2 つの行列のそれぞれ対応する成分を加えることによって合計生産量を表す行列

$$\begin{pmatrix} 5.7+6.0 & 2.4+2.2 & 1.7+2.0 \\ 8.5+8.2 & 4.3+4.5 & 2.8+3.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.7 & 4.6 & 3.7 \\ 16.7 & 8.8 & 5.8 \end{pmatrix}$$

が得られたと説明している. それに対し数 C では, 同じ型の 2 つの行列 A,B の対応する成分の和を考え, これらを成分とする行列を A と B の和といい,A ＋ B とかく.2 次正

方行列の和は次のようである.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$$

これで終わり, 計算問題に続いていく. 導入時と韓国の行列は, 具体的な問題を多く使用し丁寧に導いていくことで生徒に馴染みやすく理解しやすいように学習されている. それに対し数 C の行列は私自身の経験も含め計算問題や証明問題など中心で, 最低限の知識を学ぶようであった.

6 授業計画

1. 行列の演算
〔行列の加法, 減法, 実数倍, 乗法〕
ねらい：具体例から行列を導き, 計算をすることで, 行列の加法・減法・実数倍・乗法の決まりを理解する. 日常問題の表から行列を導き演算をできるようにする。
例) 教科書の比較の際に載せた表からそれぞれの商品の平日, 休日の売上合計はいくつか.(加法)
A店のそれぞれの売上個数はB店よりいくつ多いか求めよ.(減法)
また, A店の全部の売上個数が 10 %アップしたときいくつずつになるか.(実数倍)
をそれぞれ行列を用いて求め, 行列の加法・減法・実数倍の公式を導く.
次に, 左下の表は 2 種類の商品の単価を, 右下の表はある人が 2 種類の商品の買う個数を表している.

商品	チョコ	ガム
単価 (円)	50	20

チョコ (個)	3
ガム (個)	5

それぞれ値段と個数で単位のベクトルが違うため, 行ベクトルと列ベクトルで表している. このとき, この人が支払う代金は 50 × 3 ＋ 20 × 5 ＝ 250(円) である. これをそれぞれのベクトルの積で表すと

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ab + cd$$

次に, A, Bの 2 軒の店があり, 商品の値段が店によって異なり, 左下の表になっている. また, 甲, 乙の 2 人が買いたい数量は右下の表になっている.

値段	チョコ	ガム
A店	50	20
B店	53	18

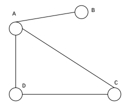
数量	甲	乙
チョコ	3	2
ガム	5	10

このとき, A店で甲が買う代金, 乙が買う代金はいくらか
その後の演習も同じような文章問題を用いる.
それぞれがそれぞれの店で支払う代金の一覧表は以下のようになる.

代金 (円)	甲	乙
A店	250	300
B店	249	286

この表は上記にある二つの表を掛け合わせることによって得られる. この様に,（単価）×（購入個数）＝（代金）の乗法を拡張して（単価の行ベクトル）×（購入個数の列ベクトル）＝（代金）の定義を理解させ, (単価の表）×（購入個数の表）＝（代金）という 2 × 2 型同士の積の定義を行う.

2. 行列とグラフ
ねらい：グラフを行列で表すことを理解する.
例）A,B,C,D 地点がそれぞれ以下のように線でつながっているとき, それぞれを出発点, 到着点とみて道があるかないかを見て, あるところにはある個数を, ないところは 0 書かせる.



その情報をまとめるために, 行を出発点, 列を到着点として行列で表す方法を学び, 実際にいろんなグラフを表してみる. また, 行列からグラフを表す.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

次に, 出発点から 2 本の道で到着できる経路があるところに経路の個数を, ないところには 0 を入れ, 行列を作る. はじめはグラフから読み取って作るが, 計算を利用して経路が 1 のときの行列を 2 乗（A^2=A × A) すると経路が 2 のときの行列と同じになることを確かめる.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A(経路が 1 のときの個数を表した行列）をかけていくと, その指数が距離 (辺の数）となる経路の個数を表した行列が求められることを確かめ学ぶ.
例）A^4 ばらば, 出発点から到着点までの距離 (辺の数）が 4 である経路の個数をあらわす行列が求められる.

7 おわりに

私は大学の多くの講義で行列の使い方や利用のされ方を学んだため, 理系に進む生徒だけでも高校で学んでほしいと思っている.

参考文献

[1] 東京書籍株式会社編集部：『新訂数学 IIB』. 東京書籍株式会社, 東京, (1969,2012)

[2] ユ・チョンフ他：数学 I, 斗山社 (2009)

[3] 文部科学省：高等学校学習指導要領本文 (平成 21 年 3 月告示)

[4] 国立教育政策研究所：
https://www.nier.go.jp/guideline/