和算におけるヘロン三角形の研究

2011SE008 青山真大
指導教員：小藤俊幸

1　はじめに

和算とは, 明治以降に導入された西洋の数学, 洋算に対する言葉で明治以前に発達した日本固有の数学を指す．江戸期の和算家に関孝和, 建部賢弘, 久留島義太がいた．和算というと算額に象徴されるように図形に関する問題が有名である．しかし整数に関する研究もなされている．

本研究では久留島義太と松永良弼によるヘロン三角形の研究 [1] を取り上げて考察する．

ヘロン三角形とは三辺の長さと面積の全てが整数になる三角形である．性質としては三辺が全て整数の直角三角形は面積も整数となる．よってこれらの直角三角形はヘロン三角形となる．

代表的なヘロン三角形は３：４：５の直角三角形でかつ最小のピタゴラス三角形である [2].

本研究ではヘロン三角形と久留島義太の法の 2 つを比較する．

2　ヘロン三角形の公式

ヘロン三角形の 3 辺の長さは

$$\begin{aligned} a &= n(m^2+k^2) \\ b &= m(n^2+k^2) \\ c &= (m+n)(mn-k^2) \end{aligned}$$

で表すことができる．

面積 S は

$$S = mnk(m+n)(mn-k^2)$$

で表せる．m, n, k は以下の条件を満たす整数である．

$$\begin{aligned} gcd(m,n,k) &= 1 \\ mn > k^2 &\geqq \frac{m^2 n}{(2m+n)} \\ m \geqq n &\geqq 1 \end{aligned}$$

上の条件を満たさない m, n, k を用いてもヘロン三角形にはなるが, これは小さいヘロン三角形を拡大したものになる [3].

このとき, 出てくる a,b,c の値をヘロン数とする．

3　久留島義太の法

久留島義太の法を用いて三辺の長さが全て整数になる値を見つける．久留島義太の法は任意の二つの分母子（分散をいう）n_1/m_1,n_2/m_2 を前分母, 中分母と名づけ

$$m_3 = m_1n_2 + m_2n_1, n_3 = m_1m_2 - n_1n_2$$

から得られる n_3/m_3 を後母子と名づける．この三つの分数から

$$A = n_1(m_2n_3 + m_3n_2), B = n_2(m_1n_3 + m_3 + m_2n_1), \\ C = n_3(m_1n_2 + m_2n_1)$$

を作り, 公約数があれば, それで約したものが, 三角形の 3 辺を表す．何となれば,

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}(A+B+C) &= m_1n_2n_3 + m_2n_1n_3 + m_3n_1n_2, \\ S - A &= m_1n_2n_3, \\ S - B &= m_2n_1n_3, \\ S - C &= m_3n_1n_2 \end{aligned}$$

したがって

$$\sqrt{S(S-A)(S-B)(S-C)} = n_1n_2n_3\sqrt{m_1m_2m_3S}$$

しかるに

$$\begin{aligned} S &= m_1n_2n_3 + m_2n_1n_3 + m_3n_1n_2 \\ &= n_3(m_1n_2 + m_2n_1) + m_3n_1n_2 \\ &= m_3(n_3 + n_1n_2) = m_1m_2m_3 \end{aligned}$$

であるから, この三角形の積は

$$m_1m_2m_3n_1n_2n_3$$

に等しい [1].

この久留島の法で出てくる A,B,C を久留島数とする．

4　パソコンによる久留島数の生成

m_1, n_1 の値を固定して m_2, n_2 の値を大きくしていく．m_1 を 2,n_1 に 1 で固定し,m_2,n_2 に 1〜21 までの値を規則的に入れていく．m_2 に 1,n_2 に 2 を入れたら次は m_2 に 2,n_2 に 3 を入れていき,m_2 に 20,n_2 に 21 まで入れていく．同様に m_1 に 3,n_1 に 1 を入れた場合と,m_1 に 4,n_1 に 1 を入れた場合を実行していく．

その結果,m_1 に 3,n_1 に 1,m$_2$ に 19,n_2 に 20 を入れたときに一辺の最大値は 3800 となった．この最大値までのヘロン三角形の数は 108542 個である．三角形の個数を全て表示するのにかかる時間は 2 分 54 秒かかった．

ヘロン三角形の三辺の比が 3:4:5 になる値は,m_1 が 2,n_1 が 1,m_2 が 3,n_2 が 1 と値を入力すると出てくる．

5　プログラムの実行

久留島義太の法をプログラムにして，さまざまに m_1,n_1,m_2,n_2 の値を入れて実行した結果

$$m_1=2,n_1=1,m_2=3,n_2=4,m_3=11,n_3=2,\\ a=50,b=60,c=22,S=528$$
$$m_1=2,n_1=1,m_2=4,n_2=5,m_3=14,n_3=3,\\ a=82,b=100,c=42,S=1680$$
$$m_1=3,n_1=1,m_2=7,n_2=8,m_3=79,n_3=37,\\ a=2283,b=3800,c=2923,S=3332220$$
$$m_1=4,n_1=1,m_2=18,n_2=19,m_3=94,n_3=53,\\ a=2740,b=5814,c=4982,S=6815376$$
$$m_1=4,n_1=1,m_2=19,n_2=20,m_3=99,n_3=56,\\ a=3044,b=6460,c=5544,S=8426880$$
$$m_1=4,n_1=1,m_2=20,n_2=21,m_3=104,n_3=59,\\ a=3364,b=7140,c=6136,S=10308480$$

このような値が出た．この結果では同じ値で三辺を約分出来るものがある．

次に結果から約分出来る値を maxima を使って出し，最大公約数の値を導き出す．

$$gcd(gcd(50,60),22);\text{約数}\quad 2\\ (25,30,11)$$
$$gcd(gcd(82,100),42);\text{約数}\quad 2\\ (41,50,21)$$
$$gcd(gcd(2283,3800),2923);\text{約数}\quad 1\\ (2283,3800,2923)$$
$$gcd(gcd(2740,5814),4982);\text{約数}\quad 2\\ (1370,2907,2491)$$
$$gcd(gcd(3044,6460),5544);\text{約数}\quad 4\\ (766,1615,1386)$$
$$gcd(gcd(3364,7140),6136);\text{約数}\quad 4\\ (1841,1785,1534)$$

この結果からさまざまの整数を入れたときの一辺の最大値は 3800 である．

6　三辺の長さ

maxima を使って約分した三辺の長さ

a	b	c
25	30	11
42	50	21
61	75	34
17	21	10
2283	3800	2923
841	1400	1079

a	b	c
481	1020	869
545	856	987
1226	2601	2225
1370	2907	2491
766	1615	1386
841	1785	1534

7　ヘロン三角形の全数探索

整数 a,b,c をあたえ面積を求め，整数かどうかを判定する．整数のとき，整数部分と小数部分を比べて誤差が 10 の-6 乗まで比較し誤差がなければ書き出す．具体的には次のようにする．

```
da = (double) a;
db = (double) b;
dc = (double) c;
s = (da + db + dc)/2.0;
x = s - da;
y = s - db;
z = s - dc;
area = sqrt(s*x*y*z);
area0 = floor(area + 1.0e-12);
if(fabs(area - area0) < 1.0e-6)
{
 printf("a = %d, b = %d, c = %d
 area = %1.0f\n",
   a, b, c, area); }
```

久留島義太の法がどれだけ書き出されたものに当てはまるかを検証する．

一辺の最大値が 3800 までのヘロン三角形を求める．
その結果，この最大値のヘロン三角形の個数は 108542 個である．

8　まとめ

本研究ではヘロン三角形の公式と久留島義太の法をプログラムや maxima を用いて比較する．ヘロン三角形の公式はプログラムにすると 1 辺の最大値を設定することで，その最大値までのヘロン三角形をすぐに出すことが出来る．

しかし，久留島義太の法はさまざまに 4 つの整数を設定し三角形を出す．出てきた三角形の辺は約分が出来る値で出てくる事もある．その三角形の三辺を最大公約数にすることで同じ値になる三角形が出てくる．同じ値になった場合は被った分だけを省いてカウントする．

久留島義太の法はヘロン三角形に当てはまる一つの三角形を求めるには必要な過程が多い．

9　おわりに

はじめは久留島義太の法では全てのヘロン三角形を求めることが出来ないと考えていた．その代表として 3:4:5 の比の三角形は出てこないと考えていた．しかし，値を変えることによって求めることが出来た．久留島義太の法は自分が出したい比率のヘロン三角形を見つけるのは難しいと思う．しかし，さまざまな値で検証することによって全てのヘロン三角形を見つけることが出来るだろう．

研究結果としてヘロン数 $a,b,c=$ 久留島数 A,B,C になると予想する．

参考文献

[1] 日本学士院.『明治前日本数学史　第二巻』. 日本学士院日本科学史刊行会. 東京. 1956.

[2] 細矢治夫.『トロポジカル・インデックス』. 日本評論社.2012.

[3] RALPH HEINER BUCHHOLZ. 『PERFECT PYRAMIDS』. BULL.AUSTRAL.MATH.SOC.Vol45(1993)[353-368].