# ディスクリプタ表現を用いた磁気浮上装置の $H_\infty$ 制御

2012SE283 山本健太
指導教員：陳幹

## 1 はじめに

磁気浮上系は通常, 不安定である. そのため厳密なモデリングが重要となる. そのため, 線形化誤差とセンサノイズを考慮する. また, 本研究ではロバスト安定性を保証するためにポリトープ表現を用いる. このときディスクリプタ表現を用いることによりポリトープ表現を容易にする.

## 2 モデリング

### 2.1 制御対象

本研究で用いる磁気浮上装置の概略図を図 1 に示す. また, モデリングに用いる物理パラメータは, 鋼球位置 $x_b$, 鋼球質量 $M_b$, コイルの電流 $I_c$, 電磁力 $F_c$, 重力加速度 $g$, 電磁力定数 $K_m$, $d$ である.

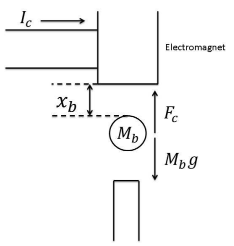


図 1 磁気浮上系の概略図

### 2.2 運動方程式

図 1 より, ニュートンの第二法則を用いると磁気浮上系の運動方程式は以下のようになる.

$$M_b \frac{d^2}{dt^2} x_b = M_b g - F_c \tag{1}$$

また電磁力の吸引力 $F_c$ は以下の式で与えられる.

$$F_c = K_m \frac{I_c^2}{2(x_b + d)^2} \tag{2}$$

式 (1), 式 (2) より以下の式が成り立つ.

$$\frac{d^2}{dt^2} x_b = g - \frac{K_m I_c^2}{2M_b (x_b + d)^2} \tag{3}$$

式 (3) は非線形であるため平衡点 $(x_{b0}, I_{c0})$ 周りで線形化する. このとき $x_b, I_c$ の微小変位をそれぞれ $\Delta x_b, \Delta I_c$ とおくと

$$x_b = x_{b0} + \Delta x_b, \qquad I_c = I_{c0} + \Delta I_c \tag{4}$$

となる. 式 (4) を式 (3) に代入して線形化を行うと以下のようになる.

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta x_b = \frac{2g}{x_{b0} + d} \Delta x_b - \frac{2g}{I_{c0}} \Delta I_c \tag{5}$$

### 2.3 システム同定

平衡点 $(x_{b0}, I_{c0})$ において鉄球の加速度は 0 となるため, 式 (3) より

$$g - \frac{K_m I_{c0}^2}{2M_b (x_{b0} + d)^2} = 0 \tag{6}$$

式 (6) は以下のように変形できる.

$$I_{c0} = \sqrt{\frac{2M_b g}{K_m}} x_{b0} + \sqrt{\frac{2M_b g}{K_m}} d \tag{7}$$

よって, 平衡電流と平衡位置の関係を表す数直線を求めれば係数比較により $K_m, d$ を求めることができる. 平衡位置を 4mm から 10mm まで 1mm ごとにとり, 各点における電流を計測し最小二乗法により直線近似を行った結果, 傾き $a = 97.3286$, 切片 $b = 0.3236$ となった. 式 (7) と係数比較を行うと以下のようになった.

$$K_m = \frac{2M_b g}{a^2} = 1.4070 \times 10^{-4} \tag{8}$$

$$d = \frac{b}{a} = 0.003325 \tag{9}$$

### 2.4 状態空間表現

式 (5), 式 (7) より, 状態変数を $x_n = [\Delta x_b \ \Delta \dot{x}_b]^T$, $u = \Delta I_c$ とおくと, 状態空間表現は以下のようになる.

$$\dot{x}_n = A_n x_n + B_n u \tag{10}$$

$$y_n = C_n x_n \tag{11}$$

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{x_{b0}+d} & 0 \end{bmatrix}, \ B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2g}{(x_{b0}+d)\sqrt{\frac{2M_b g}{K_m}}} \end{bmatrix}, \ C_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

式 (10) は, 行列 $A_n$, $B_n$ に不確かなパラメータ $x_{b0}$ が存在する. そのためディスクリプタ表現を用いて 1 つの行列にまとめる. 状態変数を $x_d = [\Delta x_b \ \Delta \dot{x}_b \ \Delta \ddot{x}_b]^T$ とおくと, 状態空間表現は以下のようになる.

$$E_d \dot{x}_d = A_d x_d + B_d u \tag{12}$$

$$y_d = C_d x_d \tag{13}$$

$$E_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{2g}{K_m} & 0 & -\frac{x_{b0}+d}{K_m} \end{bmatrix}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2g}{\sqrt{2M_b g}} \end{bmatrix}, \quad C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

そして, 定常偏差無く目標値 $r$ に追従させるために状態変数を $x_e = [\int_0^t e(\tau)d\tau \; x_d]^T$ とおくと, 状態空間表現は以下のようになる.

$$E_e\dot{x}_e = A_e x_e + B_e u + B_r r \tag{14}$$
$$y_e = C_e x_e \tag{15}$$

$$E_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_d \end{bmatrix},\; A_e = \begin{bmatrix} 0 & -C_d \\ 0 & A_d \end{bmatrix},\; B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ B_d \end{bmatrix}$$
$$B_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\; C_e = \begin{bmatrix} 0 & C_d \end{bmatrix}$$

### 2.5 ノイズの考慮

本研究では線形化誤差とセンサノイズを考慮する. それぞれ $d_{10}, d_{20}$ とおき, 周波数重み $W_1(s), W_2(s)$ を用いて周波数領域での特長付けを行う.

$$d_{10}(s) = W_1(s)d_1(s) \tag{16}$$
$$d_{20}(s) = W_2(s)d_2(s) \tag{17}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} A_{W1} & B_{W1} \\ C_{W1} & D_{W1} \end{bmatrix},\; W_2 = \begin{bmatrix} A_{W2} & B_{W2} \\ C_{W2} & D_{W2} \end{bmatrix}$$

$W_1(s)$ は低周波でゲインが大きくなるものを選び, $W_2(s)$ は高周波でゲインが大きくなるものを選ぶ [1]. 状態変数を $x_g = [x_{d1} \; x_{d2} \; x_e]^T$, $w = [d_1 \; d_2 \; r]^T$ とすると, ノイズを考慮した状態空間表現は以下のようになる.

$$E_g\dot{x}_g = A_g x_g + B_{1g} w + B_{2g} u \tag{18}$$
$$y_g = C_g x_g + D_g w \tag{19}$$

$$E_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E_e \end{bmatrix},\; A_g = \begin{bmatrix} A_{W1} & 0 & 0 \\ 0 & A_{W2} & 0 \\ B_{d1}C_{W1} & 0 & A_e \end{bmatrix}$$
$$B_{1g} = \begin{bmatrix} B_{W1} & 0 & 0 \\ 0 & B_{W2} & 0 \\ B_{d1}D_{W1} & 0 & B_r \end{bmatrix},\; B_{2g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_e \end{bmatrix}$$
$$C_g = \begin{bmatrix} 0 & D_{d2}C_{W2} & C_e \end{bmatrix},\; D_g = \begin{bmatrix} 0 & D_{d2}D_{W2} & 0 \end{bmatrix}$$
$$B_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T,\; D_{d2} = 1$$

## 3 制御系設計

### 3.1 ポリトープ表現

今回の実験での鋼球の移動範囲を以下のように定め, 行列 $A_g$ の端点を以下のようにおく.

$$x_b \in [x_{b\_min},\; x_{b\_max}] = [4 \times 10^{-3},\; 10 \times 10^{-3}] \tag{20}$$
$$A_{g1} = A_g(x_{b\_min}),\; A_{g2} = A_g(x_{b\_max}) \tag{21}$$

### 3.2 $H_\infty$ 制御

目標値 $r(t)$ から評価出力 $z(t)$ までの閉ループ伝達関数の $H_\infty$ ノルムが

$$||G(s)||_\infty < \gamma,\; \gamma > 0 \tag{22}$$

を満たすことを考える. 状態, 偏差の積分, 入力に対する重みをそれぞれ $W_x, W_e, W_u$ とおくと, 評価出力 $z$ は

$$z = Cx_g + Du \tag{23}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & W_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\; D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W_u \end{bmatrix}$$

となり, 行列 $E_g$ の構造を考慮すると LMI 条件式は以下のようになる [2].

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix},\; X_{11} > 0$$

$$\begin{bmatrix} A_{gi}X + XA_{gi}^T + B_{2g}Y + (B_{2g}Y)^T & (CX+DY)^T & B_{1g} \\ CX + DY & -\gamma I & 0 \\ B_{1g} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$
$$(i = 1, 2)$$

## 4 シミュレーションと実験結果

線形化誤差, センサノイズを考慮していないシミュレーションと実験結果を図 2, 考慮したシミュレーションと実験結果を図 3 に示す. 線形化誤差, センサノイズを考慮したほうが振動が抑えられていることが図 2, 図 3 より分かる.

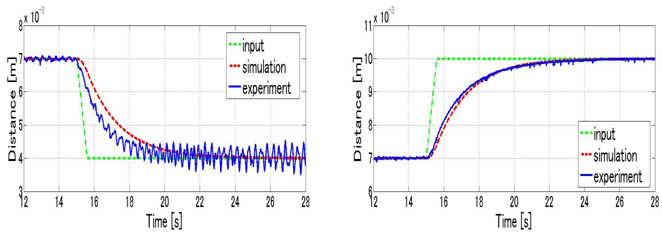


図 2 考慮なしシミュレーションと実験結果

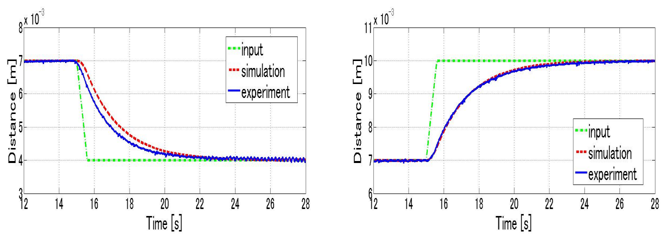


図 3 考慮ありシミュレーションと実験結果

## 5 おわりに

本研究では電磁力定数の同定, ディスクリプタ表現を用いた状態方程式の導出を行った. また, 線形化誤差やセンサノイズを考慮することで, 振動を抑えることができた.

## 参考文献

[1] 橋本 桂司, 藤田 政之, 松村 文夫:二重柔軟ビーム磁気浮上系の不確かさを考慮したモデリング, システム制御情報学会論文誌, Vol. 6, No. 2, pp. 89-95, 2012

[2] 原 辰次:線形行列不等式 (LMI) 表現と Riccati 不等式, 計測と制御, 第 35 巻, 第 12 号, 1996