アイドラプーリを考慮したベルト駆動の目標値追従制御

2012SE207 太田悠斗

指導教員：陳幹

1　はじめに

従来のベルト駆動のモデリング [1] において，減速機と駆動側のプーリのダイナミクスを連立することで負荷側のプーリと駆動側のプーリのダイナミクスのみでモデリングを行っている．本研究では，提案した減速機を考慮する六次元モデルと従来の四次元モデルとの比較を行い，2 つの数学モデルの良し悪しを検討した．また四次元モデル，六次元モデルを用いてロードプーリを目標角度に追従させる制御器をそれぞれ設計し実装した．

2　数学モデル

制御対象の各文字名称及び物理パラメーターを表 1 に示す．またベルト駆動モデルを図 1 に示す．

表 1　ベルト駆動物理パラメータ

名称	値	単位
ロードプーリの半径	$r_l = 6.0 \times 10^{-2}$	[m]
ドライブプーリと接続するアイドラプーリの半径	$r_{id} = 2.0 \times 10^{-2}$	[m]
ロードプーリと接続するアイドラプーリの半径	$r_{il} = 3.0 \times 10^{-2}$	[m]
ドライブプーリの回転半径	$r_d = 1.0 \times 10^{-2}$	[m]
ドライブプーリのイナーシャ	$J_d = 4.0 \times 10^{-4}$	[kgm^2]
アイドラプーリのイナーシャ	$J_p = 3.75 \times 10^{-5}$	[kgm^2]
ロードプーリのイナーシャ	$J_l = 6.5 \times 10^{-3}$	[kgm^2]
ドライブプーリ側のばね定数	$K_D = 1000$	[N/m]
ロードプーリ側のばね定数	$K_L = 1000$	[N/m]
ドライブプーリの粘性摩擦係数	$c_d = 2.0 \times 10^{-3}$	[Ns/rad]
ロードプーリの粘性摩擦係数	$c_l = 3.8 \times 10^{-2}$	[Ns/rad]
ドライブプーリとロードプーリとのギア比	$gr_{dl} = 4$	
ドライブプーリとアイドラプーリとのギア比	$gr_{id} = 2$	
ロードプーリとアイドラプーリとのギア比	$gr_{il} = 2$	

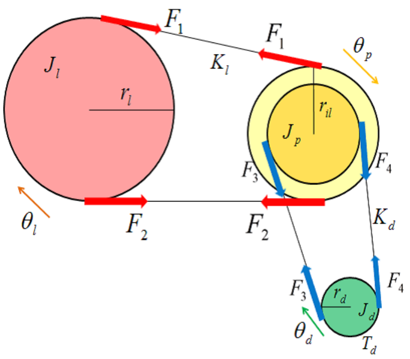

図 1　ベルト駆動モデル

ドライブプーリ (駆動側) の回転角度を θ_d, アイドラプーリ (減速機) の回転角度を θ_p, ロードプーリ (負荷側) の回転角度を θ_l, 入力トルクを T_d と定める．またロードプーリとアイドラプーリ間で働く 2 つの力をそれぞれ F_1, F_2 とし，ドライブプーリとアイドラプーリ間で働くふたつの力を F_3, F_4 とするとロードプーリ，アイドラプーリ，ドライブプーリの運動方程式はそれぞれ以下の式 (1), (2), (3) となる．

$$(F_1 - F_2)r_l - c_2\dot{\theta}_l = J_l\ddot{\theta}_l \tag{1}$$

$$(F_2 - F_1)r_{il} + (F_4 - F_3)r_{id} = J_p\ddot{\theta}_p \tag{2}$$

$$T_D + (F_3 - F_4)r_d - c_1\dot{\theta}_d = J_d\ddot{\theta}_d \tag{3}$$

初期張力を F_0 とすると F_1, F_2 は以下となる．

$$F_1 = F_0 + K_L(r_{il}\theta_p - r_l\theta_l) \tag{4}$$

$$F_2 = F_0 - K_L(r_{il}\theta_p - r_l\theta_l) \tag{5}$$

また，式 (2), (3) を連立させることにより以下の式 (6) を得る．

$$\begin{aligned} &T_d + \left\{2K_L(r_l\theta_l - r_{il}\theta_p)r_{il} - J_p\ddot{\theta}_p\right\}\frac{r_d}{r_{id}} - c_1\dot{\theta}_d \\ &\quad = J_d\ddot{\theta}_d \end{aligned} \tag{6}$$

$\ddot{\theta}_p = \frac{r_d}{r_{id}}\ddot{\theta}_d = gr_{id}^{-1}\ddot{\theta}_d$ であることから式 (6) は

$$\begin{aligned} &T_d + 2gr_{id}^{-1}K_L(r_l\theta_l - gr_{id}^{-1}r_{il}\theta_d)r_{il} \\ &\quad - gr_{id}^{-2}J_p\ddot{\theta}_d - c_1\dot{\theta}_d = J_d\ddot{\theta}_d \end{aligned} \tag{7}$$

と書き直せる．

3　問題提起と六次元モデル

これまでのモデリングの問題点は以下の二点である．

- 式 (2), (3) の連立，すなわちアイドラプーリのダイナミクスを消去したこと．
- 式 (7) が成立する，すなわちアイドラプーリとドライブプーリとの間にギア比の関係が成り立つこと．

アイドラプーリのダイナミクスを消去することはアイドラプーリの状態を考えないことになってしまう．また，ベルト駆動においては各プーリの回転角がギア比によって定まらない．そこでアイドラプーリのダイナミクスも考慮する六次元モデルを用いることを考える．式 (2), (3) において F_3, F_4 を以下のように表現できる．

$$F_3 = F_0 + K_L(r_{id}\theta_p - r_d\theta_d) \tag{8}$$

$$F_4 = F_0 - K_L(r_{id}\theta_p - r_d\theta_d) \tag{9}$$

したがってアイドラプーリの運動方程式は次式となる．

$$\begin{aligned} &(\ F_2 - F_1)r_{il} + (F_4 - F_3)r_{id} = J_p\ddot{\theta}_p \\ \Rightarrow &- 2K_L(r_{il}\theta_p - r_l\theta_l) - 2K_D(r_{il}\theta_p - r_d\theta_d) \\ &= J_p\ddot{\theta}_p \end{aligned} \tag{10}$$

式 (1), (3), (8), (9), (10) より状態変数を

$$x_6(t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_d(t) & \dot{\theta}_p(t) & \dot{\theta}_l(t) & \theta_d(t) & \theta_p(t) & \theta_l(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

と定めると状態空間表現は次式となる．

$$\begin{cases}\dot{x}_6(t) = A_6x_6(t){+}B_6u_6(t)\\ y_6(t) = C_6x_6(t)\end{cases} \tag{12}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} -\frac{c_d}{J_d} & 0 & 0 & -\frac{2K_Dr_d^2}{J_d} & \frac{2K_Dr_{id}r_d}{J_d} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{2K_Dr_dr_{id}}{J_p} & -\frac{2(K_Lr_{il}^2+K_Dr_{id}^2)}{J_p} & \frac{2K_Lr_lr_{il}}{J_p}\\ 0 & 0 & -\frac{c_2}{J_l} & 0 & \frac{2K_Lr_{il}r_l}{J_p} & -\frac{2K_Lr_l^2}{J_l}\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$B_6 = \begin{bmatrix}\frac{1}{J_d}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, C_6 = [\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ ] \tag{13}$$

4　ベルト駆動システムの過渡特性とゲイン特性

本研究では入力としてインパルス入力と，様々な周波数における正弦波入力を加えてシステムの過渡特性，ゲイン特性を知ることで 2 つの数学モデルの比較を行う．式 (12) から入力 $U_6(s)$ から出力 $Y_6(s)$ までの伝達関数 $P_6(s)$ は

$$P_6(s) = \frac{Y_6(s)}{U_6(s)} = C_6(sI - A_6)^{-1}B_6 \tag{14}$$

となる．式 (14) を用いて，システムのインパルス応答と周波数応答を調べた．2 つの数学モデルにおけるインパルス応答のシミュレーション結果を図 2 に，ゲイン線図を図 3 にそれぞれ示す．

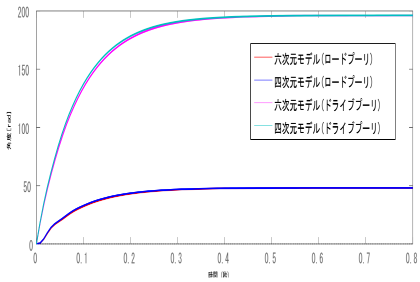

図 2　インパルス応答

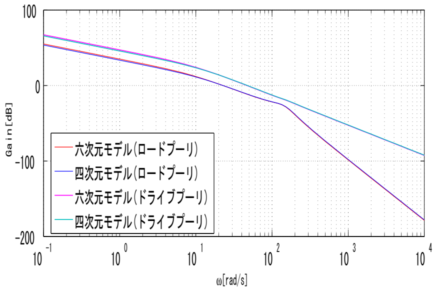

図 3　ゲイン線図

5　コントローラ設計

本研究ではロードプーリの角度を目標値へ追従させる制御を行う．そこで最適サーボシステム [2] を設計する．定常値 $x_\infty, u_\infty, w_\infty$ からの変動を

$$\tilde{x}_e(t) = \begin{bmatrix}\tilde{x}_6(t)\\ \tilde{w}(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x_6(t)\\ w(t)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}x_\infty\\ w_\infty\end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\tilde{u}(t) = u_6(t) - u_\infty \tag{16}$$

と定義すると以下のように拡大偏差システムを得る．

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}_e(t) = A_e\tilde{x}_e(t) + B_e\tilde{u}(t)\\ e(t) = C_e\tilde{x}_e(t)\end{cases} \tag{17}$$

$$A_e = \begin{bmatrix}A_6 & O\\ -C_6 & O\end{bmatrix}, B_e = \begin{bmatrix}B_6\\ O\end{bmatrix}$$

$$C_e = [\ -C_6 \quad O\ ] \tag{18}$$

ここで評価関数

$$J = \int_0^\infty (e(t)^{\mathrm{T}}Q_1e(t) + \tilde{w}(t)^{\mathrm{T}}Q_2\tilde{w}(t) + \tilde{u}^{\mathrm{T}}R_e\tilde{u}(t))dt \tag{19}$$

を最小化するような積分型コントローラ

$$u_6(t) = kx_6(t) + g\int_0^t e(t)dt + F_ay^{ref}(t) + F_bx_0$$

$$k = -R_e^{-1}B_6^{\mathrm{T}}P_{11},\ g = -R_e^{-1}B_6^{\mathrm{T}}P_{12}, F_b = -2gP_{22}^{-1}P_{22}^{\mathrm{T}}$$

$$F_a = [\ -k + 2gP_{22}P_{12}^{\mathrm{T}} \quad I\ ]\begin{bmatrix}A_6 & B_6\\ C_6 & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O\\ I\end{bmatrix} \tag{20}$$

を最適レギュレータ理論によりリッカチ方程式の正定対称解を用いて設計する．

6　シミュレーションと実験

目標値に $t = 0.5$[s] のときに大きさ $\frac{\pi}{2}$[rad] のステップ入力をロードプーリに対して与えたときの各モデルにおけるロードプーリの角度およびドライブプーリの角度のシミュレーションと実験結果をそれぞれ図 4，図 5 に示す．

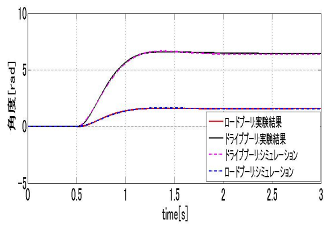

図 4　四次元モデル

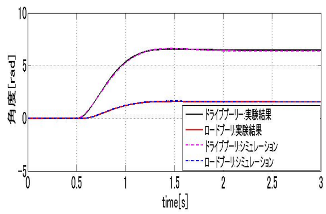

図 5　六次元モデル

7　おわりに

六次元モデルと四次元モデルにほとんど差は無いため四次元モデルで適応でき，従来のモデルは妥当であった．また二つの数学モデルにおいて，ロードプーリの角度を $\frac{\pi}{2}$[rad] へと追従させる制御器を設計し実装することでコントローラの精度にも差が無いことを確認した．

参考文献

[1] Leonardo Acho, Faycal Ikhouane, Gisela Pujo: Robust Control Design for Mechanisms with Backlash, Journal of control Engineering and Technology(JCET), vol.3 Iss, pp.175-180, 4 October 2013.

[2] 池田雅夫，須田信英:積分型最適サーボ系の構成，計測自動制御学会論文集，vol.24, No1, pp.40-46, 昭和 63 年 1 月．