共通展開図の作製

2011SE281　上野　健一

指導教員：杉浦　洋

1　はじめに

折り紙は紙を折ることでさまざまなかたちを作る伝統的な遊び・創作活動であり，私たちになじみのあるものである．この折り紙は近年，ORIGAMI として国際的な広がりをみせている．また、数学，情報科学，材料科学，構造工学，建築，デザイン，芸術，教育，歴史などの多様の側面からも研究されており，表現としての折り紙が工学的に応用される一方で，逆に数理的手法によってさまざまな作品表現が生まれるなど，折り紙研究は領域横断的・統合的な発展を遂げている [2].

本研究では、一つの展開図で二つの立体を作ることができる共通展開図を幾何学，アルゴリズムの数学的観点から調べ，共通展開図を設計し作製することを目標とする．

また本稿では，この共通展開図を数理的に調べるためのいくつかの定理と予想を示し，定理に基づき共通展開図を一つ作り，実際二つの立体を折ることを目標とする．

2　立方体の展開図を用いた共通展開図の作成

立方体を辺で切って開いた展開図は下図のように 11 種類ある．これらに単四面体の折線をいれることにより共通展開図を作成することを試みる．

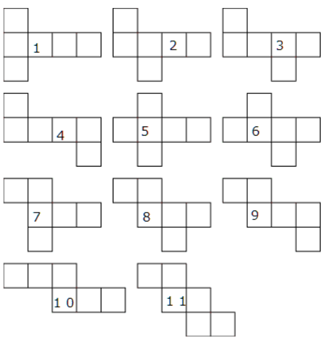

図 1　立方体の展開図

- 検証手順
- 手順 1：
  展開図の輪郭上に p2 タイリングのための回転中心を 4 つ選ぶ.
- 手順 2：
  4 つの回転中心による 180° 回転移動を繰り返し，p2 タイリングが実現するか調べる.
- 手順 3：
  4 つの回転中心を頂点とする平行四辺形描く.
- 手順 4：
  短いほうの対角線で線を引き三角形によるタイリングを作る.
- 手順 5：
  一番最初の立方体の展開図に 4. のタイリングの三角形の辺を書き込み共通展開図とする.

こうしてできた共通展開図で三角形の辺だけを折って組み立てれば単四面体，四角形の辺だけを折って組み立てると立方体となる．なお画像はパワーポイントに載せた.

- 作成可能な展開図作成可能な展開図とは，重複するところや隙間が無く p2 タイリングが可能である展開図であるということがわかった．作成可能な 2,3,8,10,11 であった.
- 作成不可能な展開図作成可能な展開図とは逆に重複してしまったり、隙間ができてしまい p2 タイリングが不可能な展開図であるということがわかった。また今回の検証では参考文献で記された誤差よりも、少し正確な値を出すことができた．作成不可の展開図は 1,4,5,6,7,9 であった.

3　初期展開図を用いた三角形の誤差修正

先ほど示したとおり，立方体の展開図の形を変形することなく共通展開図を作成することはできた．しかし，三角形は二辺が $\sqrt{3.25}$ 残りの一辺が 2 の二等辺三角形が限界であり，これ以上正三角形に近づけることができなかった．なので本章では二章で説明した初期展開図の「フタの変形」を用いて二等辺三角形を正三角形に近づけていく.

- 展開図の満たすべき条件
  以下の展開図をここでは天井切り型と呼ぶ．立方体の天井部分を正方形 ABCD，その中心を O とする．O と A を結ぶ曲線 γ_1 を 90° ずつ回転した曲線を $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ とし，これら 4 本の曲線で正方形 ABCD を切り開く．立方体の中心を P とし，立方体の底の正方形 EFGH を中心 P にたいして天井の切断と点対称に切り開き，それを辺 AE で切断する.

  その展開図において辺 BC についた天井の断片の境界 γ_2 と辺 BC を上に 1/4 平行移動した線分との交点で一番左のものを c_1 とする．また，その展開図において辺 GH についた底ふたの部分の境界と辺 GH を 1/4 下に平行移動させた線分との交点を c_2 とする．線分 c_1 と c_2 を 2 右に平行移動させたものを $c_1'c_2'$ とする．線分 $c_1'c_2'$ で切断し右に切り離された断片を左に 4 平行移動し展開図につける．展開図を $c_1''c_2''$ で切断し左側に切り離された断片を右に 4 平行移動し展開図につける．$c_1'c_2'$ を通る直線上に c_1 からも c_2 からも距離が等しい点を c_3' とする．c_3' が線分 $c_1'c_2'$ の上にあれば

c_3' を c_3 とする．線分 $c_1'c_2'$ の上に無ければ c_3'wo $c_1'c_2'$ を結ぶ直線上で線分 $c_1'c_2'$ の長さの整数倍移動し線分 $c_1'c_2'$ の上に持ってきてそれを c_3 とする．c_1c_2 の中点を中心に c_3 を 180° 回転して c_4 とする．$c_1c_2c_3c_4$ がそれぞれ p2 タイリングの支点になっていればこの展開図は $c_1c_2c_3'$ で作られる三角形とその合同な三角形を四つの面とする単四面体との共通展開図となる．

- p2 タイリングを作り方

点 O で展開図を回転した図形がパワーポイントの図形である．また、メインのブロックのフタの部分に点 A をとる．メイン図形の上蓋の中点 P_1 をとる．点 o を中心に点 P_1 を 180° 回転させる．こうしてできた点を P_1' とする．この P_1' を点 A を中心に 90° 回転させてできた点を P_2 とする．このような手順を繰り返していく．ここで，点を回転していくときにメインの図形の隣の図形に点が移動してしまったときは，メインの図形の同じ位置に戻す．さらにここではメインの上蓋の範囲を内と呼ぶ．この手順を進めていくと P_1 が内ならば $P_2, \cdots, P_n$ も内であると言える．

この手順を以下の図で考えると結果パワーポイントの図ようになる．

ここでわかるように移動して $'$ がついた次の移動で元の位置に戻ってくるブロックがある．ブロックをセルと呼ぶことにし元の位置に戻ってくるセルを大陸と呼ぶことにする，以下の図をセルで考える．結果パワーポイントに示した展開図ができ，これは今回最終的にできた図形である．

- フタの変形とは

今回は，回転の中心 c をずらす方法を用いる．立方体と正四面体の共通展開図ができるとしたら，二つの立体の表面積は等しいので立方体の辺の長さを 1 とすれば正四面体の辺の長さは簡単な計算によりルート 2 ルート 3 となる．回転中心を結んだ線分が単四面体を構成する二等辺三角形の底辺となる．o を原点として回転中心 c の座標を $c = (d, 1/4)$ とすると理想的な d は

$$d = d_I = 1 - \sqrt{(\sqrt{2\sqrt{3}})^2 - (\frac{3}{4})^2}$$

である．この式は無理数であり，本方法は有理数でないと行えない．なので，なるべく d_I に近い有理数を d として，構成を行う．d の候補として d_I の連分数による近似を用いる．この連分数展開を

$$d_I = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

とする．そして，

$$d_1 = \frac{1}{a_1}$$

，

$$d_2 = \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$$

，すなわち，

$$d_3 = \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}$$

を候補として用いた．d_1 から d_4 までの Mathmatica による計算の結果を以下に載せる．

$$d_1 = \frac{1}{2} \quad \text{誤差} \quad d_1 - d_I \cong 5.1 \times 10^{-2}$$

$$d_2 = \frac{4}{9} \quad \text{誤差} \quad d_2 - d_I \cong -4.6 \times 10^{-3}$$

$$d_3 = \frac{9}{20} \quad \text{誤差} \quad d_3 - d_I \cong 9.3 \times 10^{-4}$$

$$d_4 = \frac{22}{49} \quad \text{誤差} \quad d_4 - d_I \cong -8.9 \times 10^{-5}$$

d_4 は定規とカッターナイフによる精度を超えているので，製作をあきらめた．今回は d3 を用いる．Mathmatica によって求め，フタの形を決定した．以下が得られた展開図である．本実験では三角形の誤差を 9.3×10^{-4} まで小さくすることができ，これはほとんど正三角形に見える．

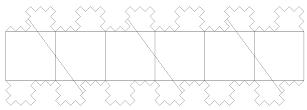

図 2　完成

また，それぞれの展開図はパワーポイントに示した．

4　おわりに

本論文では，共通展開図を多数作製した．作製するにあたり，展開図を座標平面という数学の中でも最も基本的な道具を使って解き明かした．また共通展開図は，本論中に述べた宇宙工学など，実用性が高いことがわかった．実際に作製した共通展開図を定められた折り線で折ることにより，実際に一つの展開図で二つの立体が折れることわかった．今回は立方体の展開図から単四面体を作成したが、その他の立体の展開図からまた別の立体を作る，というのが今後の課題である．

参考文献

[1] 野島　武敏，萩原　一郎 :『折紙の数理とその応用』，共立出版株式会社，2012.

[2] 舘　知宏 :『折紙ファブリケーションとコンピュテーション』，2013.