ハロー軌道上のフォーメーションフライト

2011SE148 前田かず美　2011SE222 坂井祐介

指導教員：市川朗

1　はじめに

月と地球と宇宙機による制限三体問題を考える．月と地球という二天体に対して, 宇宙機の質量は非常に微小である．よって宇宙機が天体に与える影響を無視して考えることが可能となる．つまり二天体の重力場を宇宙機が運動すると考える事ができる．特に 2 つの天体が共通の重心のまわりを互いに円運動している場合に, これら 2 つの天体の引力を受けながら動く無限小の質量の第 3 の物体の運動を論じる問題を円制限三体問題と呼ぶ．この重力場の力学的平衡点はラグランジュ点と呼ばれ, L_1 から L_5 まで合計 5 つ存在する．これらのラグランジュ点近傍を通る周期軌道はハロー軌道と呼ばれる．月の裏側に存在する L_2 点を中心にして周回するハロー軌道は様々なミッションに利用されている．観測技術の進歩によって従来の宇宙像を覆す発見が数多くなされている一方で要求されるミッションが高度化し, これに伴い更に効率のよい観測方法が求められるようになった．一例がフォーメーションフライトである．これは従来 1 機の大型衛星で行っていたミッションを複数の小型衛星を用いて協調して観測を行う編隊飛行技術のことである．複数の小型衛星を用いて観測することは, 1 機の大型衛星を用いるよりも効率が良いとされている．本研究では L_2 点近傍のハロー軌道を目標軌道とし 2 機の人工衛星を用いたフォーメーションフライトを行うこととする．L_2 点を出発点とし, 目標軌道への移行制御を行う．収束後は維持制御に切り替えることとする．その後, 主衛星を中心として約 2[km] 離れたところを円軌道を描くように従衛星を周回させ, フォーメーションフライトを行う．性能評価には収束までの時間である整定時間 (ST) と, 燃料消費と比例関係にある速度変化の総和（$L1$ ノルム）を用いることとする．

2　軌道方程式

2.1　三体問題

地球, 月, 宇宙機の円制限三体問題について考え, 軌道方程式を導出する．図 1 の通り, 地球の質量を M_e, 月の質量を M, 宇宙機の質量を m とすると, 質量比は $M_e : M = 5.97219\times\ 10^{24}[\mathrm{kg}] : 7.34767\times\ 10^{22}[\mathrm{kg}] = 81.2801 : 1$ である. 以下, モデル化に用いたパラメータの値を示す．また O を慣性座標系 $O-\{\boldsymbol{I},\boldsymbol{J},\boldsymbol{K}\}$ の原点とする．ρ は地球と月の総質量に対する月の質量比率, D_0 は二天体間の重心間距離, G は万有引力定数である．

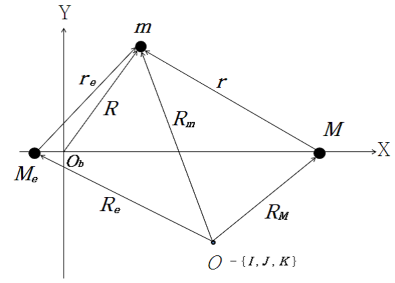

図 1　三体問題

表 1　モデル化に用いた値

パラメータ	数値
$\mu = G(M_e+M)$	$403,402[\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2]$
$\mu_1 = GM_e$	$398,500[\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2]$
$\mu_2 = GM$	$4,903[\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2]$
$\rho = M/(M_e+M)$	0.0121536
D_0	384,748[km]
$D_1 = \rho D_0$	4,676[km]
$D_2 = (1-\rho)D_0$	380,072[km]
$n = (\mu/D_0^3)^{1/2}$	$2.661365\times\ 10^{-6}[\mathrm{rad/s}]$

地球-月系の重心を回転座標系 $O_b-\{\boldsymbol{i_b},\boldsymbol{j_b},\boldsymbol{k_b}\}$ の原点とし, O_b と地球の重心との距離を D_1, O_b と月の重心との距離を D_2, 制御加速度 $\boldsymbol{u} = [u_x\ u_y\ u_z]^{\mathrm{T}}$ とすると宇宙機の運動方程式は座標を用いて

$$\begin{aligned}\ddot{X} - 2n\dot{Y} - n^2X &= -\frac{GM_e}{r_e^3}(X+D_1)\\ &\quad -\frac{GM}{r^3}(X-D_2)+u_x\\ \ddot{Y} + 2n\dot{X} - n^2Y &= -\frac{GM_e}{r_e^3}Y - \frac{GM}{r^3}Y + u_y\\ \ddot{Z} &= -\frac{GM_e}{r_e^3}Z - \frac{GM}{r^3}Z + u_z\end{aligned} \tag{1}$$

となる．ここで, $r_e = \left[(X+D_1)^2+Y^2+Z^2\right]^{1/2}$, $r = \left[(X-D_2)^2+Y^2+Z^2\right]^{1/2}$ とした.

2.2　軌道方程式の無次元化

$\tau = t/(1/n)$, $\bar{X} = X/D_0$, $\bar{Y} = Y/D_0$, $\bar{Z} = Z/D_0$ を用いて軌道方程式 (1) を無次元化すると,

$$\begin{aligned}\bar{X}'' - 2\bar{Y}' - \bar{X} &= -\frac{1-\rho}{\bar{r_e}^3}(\bar{X}+\rho) - \frac{\rho}{\bar{r}^3}(\bar{X}-1+\rho) + \bar{u_x}\\ \bar{Y}'' - 2\bar{X}' - \bar{Y} &= -\frac{1-\rho}{\bar{r_e}^3}\bar{Y} - \frac{\rho}{\bar{r}^3}\bar{Y} + \bar{u_y}\\ \bar{Z}'' &= -\frac{1-\rho}{\bar{r_e}^3}\bar{Z} - \frac{\rho}{\bar{r}^3}\bar{Z} + \bar{u_z}\end{aligned} \tag{2}$$

となる．$'$ は τ の微分である．ここで $\bar{u_x} = u_x/n^2D_0, \bar{r_e} = r_e/D_0$, $\bar{r} = r/D_0$,$\bar{r_e} = \left[(\bar{X}+\rho)^2+\bar{Y}^2+\bar{Z}^2\right]^{1/2}$, $\bar{r} = \left[(\bar{X}-1+\rho)^2+\bar{Y}^2+\bar{Z}^2\right]^{1/2}$ である．式 (2) において, 入力なしで導関数を 0 とすると

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= -\frac{1-\rho}{\bar{r_e}^3}(\bar{X}+\rho) - \frac{\rho}{\bar{r}^3}(\bar{X}-1+\rho) \\
\bar{Y} &= -\frac{1-\rho}{\bar{r_e}^3}\bar{Y} - \frac{\rho}{\bar{r}^3}\bar{Y} \\
\bar{Z} &= 0
\end{aligned}$$

となり、これらの等式を満たすラグランジュ点は軌道面内上に存在することが明らかとなる．座標の原点を L_2 点に移すために $(\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}) = (x+l_2(\rho), y, z)$ とし, L_2 点 $(l_2(\rho), 0, 0)$ において線形化すると,

$$\begin{aligned}
x'' - 2y' - (2\sigma+1)x &= \bar{u_x} \\
y'' + 2x' + (\sigma-1)y &= \bar{u_y} \\
z'' + \sigma z &= \bar{u_z}
\end{aligned} \tag{3}$$

となる．このとき表 1 より, $\sigma = \rho/\left|l_2-1+\rho\right|^3 + (1-\rho)/\left|l_2+\rho\right|^3 = 3.1904025$ である．

3 制御系設計

3.1 状態方程式の導出

式 (3) は $\boldsymbol{x} = [x\ y\ x'\ y'\ z\ z']^{\mathrm{T}}$ と $\boldsymbol{u} = [u_x\ u_y\ u_z]^{\mathrm{T}}$ を用いて,

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$

という状態方程式で表せる．ここで A, B は

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\sigma+1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sigma & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である．非線形方程式 (2) は非線形項 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ を

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} l_2 - 2\sigma x - \frac{1-\rho}{r_1^3}(x+l_2+\rho) \\ -\frac{\rho}{r_2^3}(x+l_2-1+\rho) \\ \sigma y - \frac{1-\rho}{r_1^3}y - \frac{\rho}{r_2^3}y \\ \sigma z - \frac{1-\rho}{r_1^3}z - \frac{\rho}{r_2^3}z \end{bmatrix} \tag{4}$$

とすると

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + B\boldsymbol{u} \tag{5}$$

と表せる．

3.2 誤差方程式

L_2 点近傍のハロー軌道の初期値を $\boldsymbol{x_{f_0}} = [x_{f_0}\ y_{f_0}\ x_{f_0}'\ y_{f_0}'\ z_{f_0}\ z_{f_0}']^{\mathrm{T}}$ とする．この軌道は厳密には周期軌道とならないので自由運動の 1 周目の軌道を反復させ目標軌道とする．制御を加える衛星の軌道を制御軌道と呼び, その初期値を $\boldsymbol{x_0} = [x_0\ y_0\ x_0'\ y_0'\ z_0\ z_0']^{\mathrm{T}}$ とする．このとき 2 つの軌道の方程式はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x_f}' = &\quad A\boldsymbol{x_f} + B\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_f}), \boldsymbol{x_f}(0) = \boldsymbol{x_{f_0}} \\
\boldsymbol{x}' = &\quad A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x_0}
\end{aligned} \tag{6}$$

となる．このとき誤差方程式 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_f}$ は

$$\boldsymbol{e}' = A\boldsymbol{e} + B(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_f})) + B\boldsymbol{u}$$

を満たす．最適レギュレータの重み行列を Q, R とし, 評価関数を最小にする $K = R^{-1}B^{\mathrm{T}}X$ が安定なフィードバックゲインである．ここで X はリッカチ方程式

$$A^{\mathrm{T}}X + XA + Q - XBR^{-1}B^{\mathrm{T}}X = 0$$

の解であり, 以下の制御入力

$$\boldsymbol{u} = -K\boldsymbol{e} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_f})$$

を用いると軌道誤差の方程式は

$$\boldsymbol{e}' = (A - BK)\boldsymbol{e}$$

となる．R を変化させることにより軌道誤差を 0 に近づけ, 目標軌道までのフィードバック制御を行う．

4 主衛星の移行制御と維持制御

4.1 評価方法

フォーメーション開始前に, L_2 点からハロー軌道に移行させる制御, 移行完了後に軌道上を維持させる制御を行う．最適レギュレータの状態の重み行列 Q を $Q = I_6$ で固定し, 移行制御, 維持制御それぞれにおける入力の重み行列 R を変化させてシュミレーションを行うことにより, $L1$ ノルムの変化を調べる．加速度の絶対積分である $L1$ ノルムは速度変化の総和であり, 燃料消費と比例関係にある．R の変化は $R = 10^r \times\ I_3$ の r を -3 から 1.5 まで 10^{-1} 刻みで変化させることとし, $L1$ ノルムが最小になる r を調べる．移行軌道においては収束までの整定時間 ST も考慮することとする．

4.2 移行制御

L_2 点から, ハロー軌道へ移行させる制御を行う．移行制御においては地球と月との距離の $\pm 10^{-4}(\pm 38.4748[\mathrm{km}])$ を許容誤差とし, 収束判定を行う．移行制御における入力の重み行列 R の r を変化させ, $L1$ ノルムの最小値を求める．このときの $L1$ ノルムの変化を図 2 に, 整定時間 ST については図 3 に示す．

$$L1 = \int_0^{ST} ({u_x}^2 + {u_y}^2 + {u_z}^2)^{1/2} d\tau$$

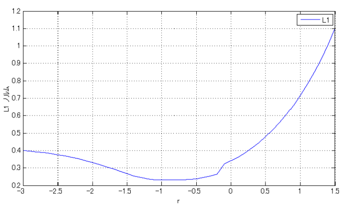

図 2　$L1$ ノルムの変化

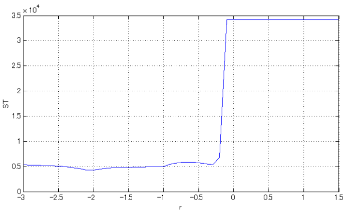

図 3　ST の変化

4.3　維持制御

ハロー軌道の初期値を出発し，そのまま軌道上を維持する制御を行う． 維持制御では，地球と月との距離の $\pm 10^{-5}(\pm 3.84748[\mathrm{km}])$ を許容誤差とし，この範囲内で維持を行う．$L1$ ノルムの式を以下に示す．この T は 1 周するのにかかる時間である．各 r における 1 周平均の $L1$ ノルムを図 4 に示す．

$$L1 = \int_0^T ({u_x}^2 + {u_y}^2 + {u_z}^2)^{1/2} d\tau$$

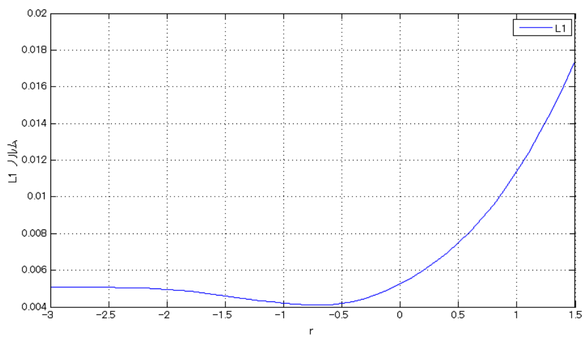

図 4　$L1$ ノルムの変化

4.4　性能評価

図 2, 図 3, 図 4 より明らかになった最適な r について以下の表 2 に示す．

表 2　最適値

	r の値	L 1 ノルム	ST
移行制御	-1	0.2306	5010
維持制御	-0.7	0.0041	-

5　フォーメーションフライト

5.1　従衛星の座標設定

従衛星の相対周期軌道 (w_1, w_2, w_3) とする．$\boldsymbol{w} = [w_1\ w_2\ w_3\ w_4]^{\mathrm{T}}$ とおき，成分を以下に示す．

$$w_1 = a\cos\omega t, w_2 = a\sin\omega t$$
$$w_3 = b\cos\omega t, w_4 = -b\sin\omega t$$

このとき $w_4 = w_3'$ であり，w_1,w_2 は面内を表し，w_3,w_4 は面外の相対位置と相対速度成分を表している．

5.2　出力レギュレータ

主衛星に従衛星を追従させるために出力レギュレーション理論を用いる．式 (6) の主衛星の制御軌道 x' を目標軌道とする．従衛星の制御軌道の方程式は以下のようになり，初期値を $\boldsymbol{x_{j0}} = [x_{j0}\ y_{j0}\ x_{j0}'\ y_{j0}'\ z_{j0}\ z_{j0}']^{\mathrm{T}}$ とする．

$$\boldsymbol{x_j}' = A\boldsymbol{x_j} + B\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_j}) + B\boldsymbol{u_j}, \boldsymbol{x_j}(0) = \boldsymbol{x_{j0}}$$

$\boldsymbol{w}$ を生成する外部システムは

$$\boldsymbol{w}' = S\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}(0) = \boldsymbol{w_0}$$

であり，

$$S = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(\omega_2)^2 & 0 \end{bmatrix}, s_1 s_2 = -(\omega_1)^2, \omega_2 > 0$$

となる．従衛星が追従する軌道は $(x + w_1, y + w_2, z + w_3)$ であり，この軌道へ移行，そして維持させる制御を加える．このとき，

$$x_j - x \rightarrow w_1$$
$$y_j - y \rightarrow w_2$$
$$z_j - z \rightarrow w_3$$

であり主衛星と従衛星の誤差である $\boldsymbol{e} = [x_j - x\ y_j - y\ z_j - z]^{\mathrm{T}}$ が常に $\boldsymbol{w}$ を保つように制御を行う．この時の出力を

$$\boldsymbol{z} = C\boldsymbol{e} + D\boldsymbol{w} \quad (7)$$

とし，この$\boldsymbol{z}$を 0 に近づけていく．ここで C,D を以下のように定める．

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

この問題の可解条件は

$$A\Pi - \Pi S + B\Gamma = 0$$
$$C\Pi + D = 0$$

が解 Π,Γ をもつことである．このレギュレータ方程式を解くと Π, Γ は以下のように与えられる．

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} s_1 s_2 - 2s_2 - 2\sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 s_2 + 2s_1 - 1 + \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\omega_2)^2 + \sigma & 0 \end{bmatrix}$$

出力 z を 0 にするフィードバック制御はリッカチ方程式の解から得られる K を用いて

$$\boldsymbol{u_j} = -K\boldsymbol{e} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_j}) + (\Gamma + K\Pi)\boldsymbol{\omega}$$

となる．[2]

6 従衛星の移行制御と維持制御

6.1 許容誤差の設定

これより移行制御, 維持制御それぞれの許容誤差を設定する．まずは従衛星の移行制御において 10 周し終わるまでの目標軌道との差を明らかにする．$r = 0$, 0.5, 1 の 3 通りを検証したところ最後まで約 ±145[km] の誤差を保ち続けることがわかった．$r = 0.5$ のときの誤差について以下の図 5 に示す．図 5 より, 従衛星における誤差が少なくとも ±145[km] は生じていることを考慮して移行制御の許容誤差を ±150[km] とする．また移行完了後に維持制御に切り替えるため, これ以上誤差が増えることを認めないこととする．したがって維持制御も移行と同様, ±150[km] を許容誤差とする．

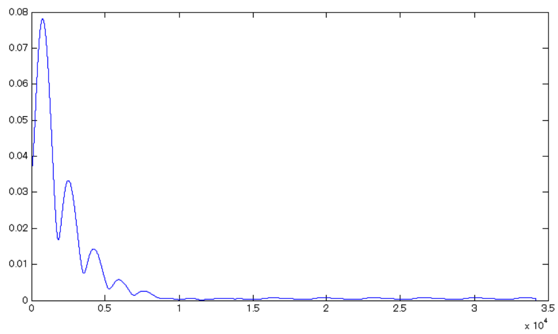

図 5 $r = 0.5$ のときの移行における誤差

6.2 評価方法

移行制御については節 4.1 と同様にして評価を行う．従衛星の維持制御については想定するミッションの期間を約 1 ヶ月としミッション終了までの間, 移行制御と同一の許容誤差内に存在し続ける事ができる r を最適な r として評価を行うこととする．

6.3 移行制御

L_2 点から従衛星の目標軌道へ移行させる制御を行う．従衛星の移行制御においては ±150[km] を許容誤差とし, 収束判定を行う．移行制御における入力の重み行列 R の r を変化させ, $L1$ ノルムの最小値を求める．このときの $L1$ ノルムの変化を図 6 に, 整定時間 ST については図 7 に示す．

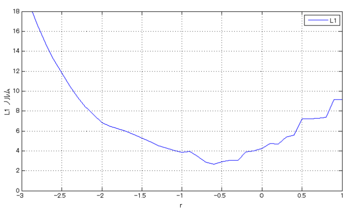

図 6 $L1$ ノルムの変化

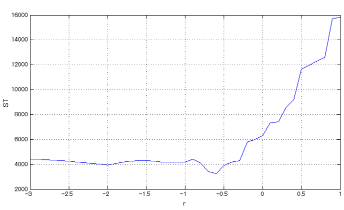

図 7 ST の変化

6.4 維持制御

主衛星の制御軌道から約 2[km] 離れたところを初期値とし, その初期値から出発した従衛星のフォーメーションを行う．各 r における 1 周平均の $L1$ ノルムを図 8 に示す．この軌道は 1 周が約 14.8 日であるため 1 ヶ月で約 2 周する．2 周させて誤差が ±150[km] 以内であり続け, なおかつ燃料消費を抑える事ができる最大の r は 0.5 であることがわかった．

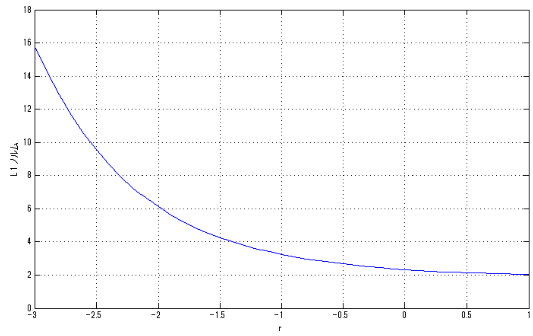

図 8 $L1$ ノルムの変化

6.5 性能評価

図 6, 図 7, 図 8 より明らかになった最適な値について以下の表 3 に示す．

表 3 最適値

	r の値	L 1 ノルム	ST
移行制御	-0.6	2.6573	3249
維持制御	0.5	2.1425	-

7 おわりに

地球-月系の円制限三体問題における L_2 点近傍のハロー軌道を用いて軌道の維持及び, フォーメーションフライトを行った．このとき, 微分方程式の数値解の導出にはルンゲクッタ法を用いた．最適レギュレータの入力の重み行列の指数 r を変化させることにより, 主衛星, 従衛星それぞれ燃料消費が最小となる r を設定することができた．

参考文献

[1] M. Utashima., "Orbital Mechanics Near Lagrange's Points",NASDA Technical Memorandum ,National Space Development Agency of Japan (NASDA) ,1997/3/31

[2] M. Bando and A. Ichikawa, "Periodic orbits and formation flying near the libration points ", 23rd International Symposium on Space Flight Dynamics (ISSFD), Pasadena,2012/10/30.

[3] Lucia.R.Irrgang, "Investigation Of Transfer Trajectories To And From The Equilateral Libration Points L4 And L5 In The Earth-Moon System", master's thesis, 2008.