真理値表による嘘つきパズルの解法
—イメージで理解する真理値表—

2011SE086 伊藤健

指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

私は，3 年次の「ソフトウェア工学演習 II」で学んだ真理値表の論理パズルへの応用に興味をもった．論理パズルには様々なものがあるが，レイモンド・スマリヤン [1] では，そのパズルの解から，その解に至った経緯を読みとりにくく，他の問題に応用できないと感じた．そこで，真理値表を用いれば，その経緯がわかるように解を記述することができて，他の問題にも応用できると考えた．

本研究の目的は，真理値表を用いることで [1] の論理パズルの解を，それに至った経緯がわかるように記述することである．具体的には，[1] の第 2 章「どのお嬢さん？」の問題に共通する前提条件を考察し，6 つの各問題に対して次の 3 つを示した．

(i) 真理値表を用いた解

(ii) [1] の解

(iii) 真理値表を用いた解と [1] の解の比較

本稿では，その 6 つの問題のうちの [1] の問題 5 に対する結果を示す．以下の 2 節で前提条件を，3 節から 5 節で問題 5 に対する上の (i)〜(iii) の結果を示す．

最初に，[1] の第 2 章の前提条件と問題 5 を，抽出しておく．

前提条件 ([1])　テレサ，テルマ，レイラ，レノアという名前の 4 姉妹がいます．名前が「テ」で始まるテレサとテルマはいつでも真実を述べ．名前が「レ」で始まるレイラとレノアはいつも嘘をつきます．

問題 5([1])　あなたが出会った 4 姉妹の中の一人は次の二つの発言をしました．
(1) テレサは，私のことをレイラだとかつて誰かにいったことがあります．
(2) テルマは，私のことをレノアだとこれまで誰かにいったことはありません．
さてこの女性は誰でしょうか．

2　前提条件の考察

この節では，[1] の第 2 章の前提条件を考察する．具体的には，以下の性質 (性質 2.1) を示す．なお，以後テレサ，テルマ，レイラ，レノアを順に，T1,T2,L1,L2 で表す．

性質 2.1　A が T1,T2,L1,L2 のいずれかの時，

$$\text{A が P と発言} \rightarrow \text{「A が T1 か T2} \Leftrightarrow \text{P」}$$

証明　A が P と発言したとする．前提条件から以下の (1), (2) がいえる．

$$\text{A が T1 か T2} \Rightarrow \text{P} \tag{1}$$

$$\text{A が L1 か L2} \Rightarrow \text{P でない} \tag{2}$$

次に (2) の対偶を取ると，

$$\text{P} \Rightarrow \text{「A が L1 か L2」でない}$$

であり，A は T1,T2,L1,L2 のいずれかだから，

$$\text{P} \Rightarrow \text{A が T1 か T2} \tag{3}$$

である．(1),(3) より，

$$\text{A が T1 か T2} \Leftrightarrow \text{P}$$

である．

3　真理値表を用いた解

この節では，問題 5 の真理値表を用いた解を示す．出会った一人を A とおく．この問題で考えなければならないのは，今までとは違い A の発言の中に別の人間の発言が入っているということである．ここで性質 2.1 を使って A の 2 つの発言について一つずつ考察していく．

まず (1) から考察する．性質 2.1 の「A が P と発言した」を (1) の「テレサは，私のことをレイラだとかつて誰かにいったことがあります」で置き換える，すなわち，A を「T1」，P を「A は L1」で置き換えると，

$$(1) \rightarrow \text{「T1 が T1 か T2} \Leftrightarrow \text{A は L1」}$$

すなわち，

$$(1) \rightarrow \text{A は L1} \tag{$*1$}$$

を得る．

続いて (2) を考察する．前提条件の対偶をとると以下のようになる．

「A が T1 か T2 ⇔ P でない」→ A が P と発言していない

そして「A か P と発言していない」を (2) の「テルマは，私のことをレノアだとかつて誰かにいったことがありません」で置き換える，すなわち，A を「T2」，P を「A は L2」で置き換えると，

$$\text{「T2 は T1 か T2} \Leftrightarrow \text{A は L2 でない」} \rightarrow (2)$$

すなわち，

$$\text{A は L2 でない} \rightarrow (2) \tag{$*2$}$$

を得る．

以上の結果を踏まえた上で，A が (1) と (2) を発言したことについて考察する．A が (1) と発言したことに，性質 2.1 を適用すると，

$$\text{A が (1) と発言} \rightarrow \text{「A が T1 か T2} \Leftrightarrow \text{(1)」}$$

すなわち，「A か T1 か T2 ⇔ (1)」がいえる．(∗1) より，

$$\text{A が T1 か T2} \rightarrow \text{A は L1} \qquad (*3)$$

がいえる．(2) と発言したことからも同様に考えると，(∗2) より，

$$\text{A は L2 ではない} \rightarrow \text{A が T1 か T2} \qquad (*4)$$

がいえる．

(∗3) と (∗4) の真理値を以下に示す．

表 1:(∗3) の真理値表

	A が T1 か T2	→	A は L1
C1	T	F	F
C2	T	F	F
C3	F	T	T
C4	F	T	F

表 2:(2) の真理値表

	A は L2 ではない	→	A は T1 か T2
C1	T	T	T
C2	T	T	T
C3	F	F	T
C4	F	T	F

ただし，C1,C2,C3,C4 は以下の場合を示す．

表 3:真理値の組

	T1	T2	L1	L2
C1	T	F	F	F
C2	F	T	F	F
C3	F	F	T	F
C4	F	F	F	T

(∗3) と (∗4) が真であることから C4 の場合が，すなわち，A はレノアであることが導かれる．

4　[1] の解とその考察

この節では問題 5 の [1] の解に対する考察を行う．[1] の解は，

『この女性の最初の発言は確実に嘘です．なぜなら，これが真実だとすると，本当のことをいうテレサがこの女性はレノアであると発言したことがあることになり，この女性はレノアです．そうすると，レノアが本当のことをいっていたことになり矛盾します．したがって，この女性は嘘つきです．そうすると，彼女が二つ目の発言も嘘ということです．つまり，テルマはこの女性がレノアであるといったことがあり，テルマは本当のことをいうのですから，この女性はレノアです．』

である．この解は，「(1) は嘘である」ということを仮定におき，その証明を行って解を導いている．一見 [1] の解の方が簡略で分かりやすく思えるが，「(1) は嘘である」という仮定を発想し辛いし，どのようにして発想されたのかも記述されていない．

5　2 つの解の比較

この節では，[1] の解と真理値表を用いた解の比較を行う．

＜ [1] の解＞

長所

・解が「(1) は嘘である」でありそうだと発想できれば，高度な数学的用語を用いずに解くことができる．

・説明が短い．

短所

・仮定としておかれた「(1) は嘘である」がどのようにして発想されたものなのかが不明確である．

・他の嘘つきパズルに応用しづらい．

＜真理値表を用いた解＞

短所

・真理値表を理解していないと解くことができない．

・説明が長い．

長所

・全ての可能性を網羅することで，その発言に至った経緯を明確にしている．

・他の嘘つきパズルにも応用ができる．

以上のことを 4 つの視点 (数学的知識の必要性，長さ，根拠の明確さ，汎用性) から表 4 ににまとめておく．表 4 における，◎，○，△，×は，その順で「よい」ことを示す．

表 4: 2 つの解の比較

	教科書	真理値表
数学的知識の必要性	○	△
長さ	○	△
根拠の明確さ	△	◎
汎用性	×	◎

6　おわりに

本研究では，真理値表を用いて解を与えることによる問題の解きやすさに加え，丁寧に説明と図を用いることでイメージしやすく問題の解に辿りつくことができた (卒業論文では図を用いて説明している)．[1] の解法は文章のみの説明で，文章の量が多く読み間違いを起こしやすいので，論理的で具体的に，そして視覚的に理解できる本研究の方が理解しやすく，図や表で纏めることによってとても見やすくなった．しかし，問題によっては真理値表によって，解法を与えることができないのを考慮して，柔軟な対応をすることが大切である．

参考文献

[1] Raymond Smullyan :「スマリヤン先生のブール代数入門 -嘘つきパズル・パラドックス・論理の花咲く庭園-」. 共立出版，東京，2008