最適レギュレータを用いたフィードバック制御

2010SE184 坂下周平　2011SE093 伊藤琢真

指導教員：市川朗

1　はじめに

ロシアが世界初の人工衛星スプートニクを打ち上げて以来、人工衛星の歴史は大量の電力を供給するための大きな太陽パネルや、膨大な通信可能量を確保するための大きな通信機器を装備するなど、大型化の一途を辿った．しかし、大型の人工衛星は性能の向上という利点を得た代わりに、打ち上げ成功確率の低さとコストの高さという欠点を抱えることなった．そこで、複数の小型衛星を編隊飛行させるという、フォーメーションフライトを用いることによって、大型の人工衛星の欠点であったコストの高さ、打ち上げ成功確率の低さという欠点を補う方法が生まれた. 本研究のフォーメーションフライトでは、主衛星の近傍にある従衛星を初期軌道から目標軌道に乗せる軌道制御を行う．人工衛星は、宇宙空間において燃料を補給することができない. その為、燃料の消費を抑える事が軌道制御では重要な課題になる．「整定時間（主衛星の近傍にある従衛星が初期軌道から目標軌道に移るまでの時間)」と「フィードバック制御に使用した燃料の量」によって軌道制御の評価を行う.「時間」を短くし、「燃料消費」を抑えるという、相反する二つの設計仕様の妥協点を見つけることで最適な制御を考える．評価は、最適レギュレータを使用することで行う．R を入力の重み行列,Q を状態の重み行列とする最適レギュレータの評価関数が最小となるフィードバックゲインを、リッカチ方程式を用いることで導く．本研究では、軌道面内、面外の「燃料消費」を L_1 ノルム L_z ノルム、「整定時間」を ST とし、また、フィードバックシステムの固有値を R のパラメータの関数として、それぞれの表す入力をグラフに表し、固有値の変化が、「燃料消費」、「整定時間」にどのような影響を与えるかを研究する.

2　円軌道上の相対運動方程式

半径 R_0 の円軌道上にある主衛星とその近傍にある従衛星の相対運動方程式について考える。主衛星重心を原点のとし、$O-\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ の回転座標系とする。このとき相対位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ として、運動方程式に代入し、それぞれ $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ について係数を比較すると

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2n\dot{y}+n^2(R_0+x)-\frac{\mu}{R^3}(R_0+x)+u_x\\ \ddot{y} &= -2n\dot{x}+n^2y-\frac{\mu}{R^3}y+u_y\\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{R^3}+u_z\end{aligned} \tag{1}$$

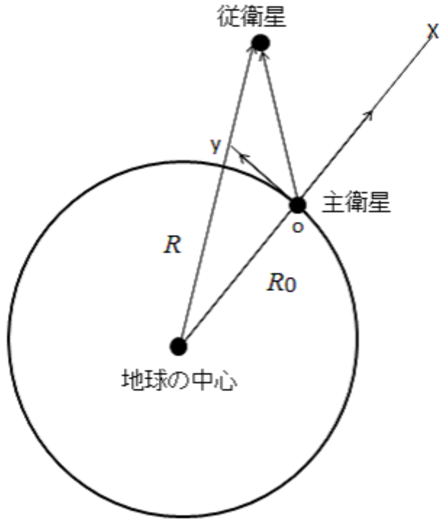

図 1　円軌道上の主衛星と従衛星

が得られる、$\boldsymbol{u}=[u_x\ u_y\ u_z]^{\mathrm{T}}$ は従衛星の制御加速度、$R=[(R_0+x)^2+y^2+z^2]^{\frac{1}{2}}$ である.(1) の方程式を原点 $x=y=z=0$ で線形化すると

$$\begin{aligned}\ddot{x}-2n\dot{y}-3n^2x &= u_x\\ \ddot{y}+2n\dot{x} &= u_y\\ \ddot{z}+n^2z &= u_z\end{aligned} \tag{2}$$

が得られる.　この方程式は Hill-Clohessy-Wiltshire(HCW) 方程式と呼ばれる.(2) 式を推力 $u=0$, 初期値を $[x_0\ y_0\ \dot{x_0}\ \dot{y_0}\ z_0\ \dot{z_0}]^{\mathrm{T}}$ を用いて解くと

$$\begin{aligned}x(t) &= 4x_0+\frac{2\dot{y_0}}{n}-\frac{3x_0+2\dot{y_0}}{n}\cos nt+\frac{\dot{x_0}}{n}\sin nt\\ y(t) &= y_0-\frac{2\dot{x_0}}{n}+\frac{2\dot{x_0}}{n}\cos nt+\frac{6x_0+4\dot{y_0}}{n}\sin nt\\ \dot{x}(t) &= \dot{x_0}\cos nt+(3nx_0+2\dot{y_0})\sin nt\\ \dot{y}(t) &= (6nx_0+4\dot{y_0})\cos nt-2\dot{x_0}\sin nt-(6nx_0+3\dot{y_0})\\ z(t) &= z_0\cos nt+\frac{\dot{z_0}}{n}\sin nt\\ \dot{z}(t) &= -nz_0\sin nt+\dot{z_0}\cos nt\end{aligned} \tag{3}$$

が得られ、この式をパラメータ表現すると

$$\begin{aligned}x(t) &= 2c+a\cos{(nt+\alpha)}\\ y(t) &= d-3nct-2a\sin{(nt+\alpha)}\\ z(t) &= b\cos{(nt+\beta)}\end{aligned} \tag{4}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} a &= [(3x_0 + 2\dot{y}_0/n)^2 + (\dot{x}_0/n)^2]^{\frac{1}{2}} \\ d &= y_0 - 2\dot{y}_0/n, \sin\alpha = -\dot{x}_0/na \\ \cos\alpha &= -(3x_0 + 2\dot{y}_0/n)/a, b = [z_0^2 + (\dot{z}_0/n)^2]^{\frac{1}{2}} \\ \cos\beta &= z_0/b, \sin\beta = -\dot{z}_0/nb \\ c &= 2x_0 + \frac{\dot{y_0}}{n} \end{aligned} \tag{5}$$

面内運動は、$c = 0$ のとき、周期解となる

$x = [x\ y\ \dot{x}\ \dot{y}\ z\ \dot{z}]^{\mathrm{T}}$ とおくと、(2) 式の状態方程式は

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + Bu, \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x_0} \tag{6}$$

と表せる. ここで

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n^2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

3 フィードバックの設計

HCW システムの目標軌道の状態方程式、制御軌道と目標軌道の誤差を $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_f}$ とおくと

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x_f}} &= A\boldsymbol{x_f} \\ \boldsymbol{x_f}(0) &= \boldsymbol{x_{f0}} \\ \dot{\boldsymbol{e}} &= A\boldsymbol{e} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{e}(0) &= \boldsymbol{e_0} \end{aligned} \tag{8}$$

が得られる. フィードバック制御は、$\boldsymbol{u} = -Ke$ で与えられる.K は $A + BK$ が安定となる任意のフィードバックゲインであり、ここでは最適レギュレータにより決定する.

4 最適レギュレータとリッカチ方程式

評価関数

$$J(u; e_0) = \int_0^{\infty} (e'(t)Q\boldsymbol{e}(t) + u'(t)R\boldsymbol{u}(t))dt \tag{9}$$

を用い、評価関数を最小化するフィードバックゲイン K を

$$K = R^{-1}B'X \tag{10}$$

で与えられる. ここで X はリッカチ方程式

$$A'X + XA + Q - XBR^{-1}B'X = 0 \tag{11}$$

の解であり.Q は半正定、R は正定行列である.[?],[?]

5 シミュレーション結果

5.1 Q を固定し、R を変化させる

評価関数の重み行列 $Q = diag(q_i)$, $q_i = 1.00 \times 10^{-1} (i = 1, 2, 5)$, $q_i = 0.00 (i = 3, 4, 6)$ で固定し、重み行列 $R = 10^r I_{3\times3}$ として r の値を大きくして重みを変化させていく.

このときの入力の積分

L_1 ノルム（面内での燃費）

L_z ノルム（面外での燃費）

整定時間

固有値

の変化をグラフで見ていく. このとき、固有値は実部と虚部に分けて出力する. 実部は、最大と最小の値を出力し、虚部は、更に面外と面内にわけ、それぞれの最大の値を出力することにする.

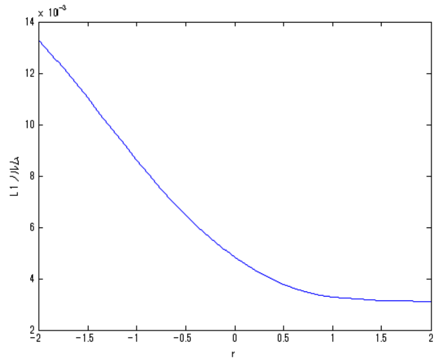

図 2 L_1 ノルム

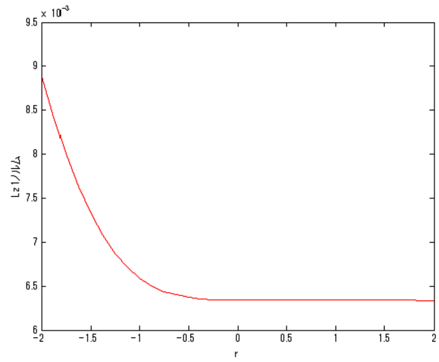

図 3 L_z ノルム

図 2、図 3 より r の値が大きくなるにつれ、L_1 ノルム、L_z ノルムの値が小さくなっていくことがわかる.r の値が大きくなるにつれ、入力 u が抑えられるためである.

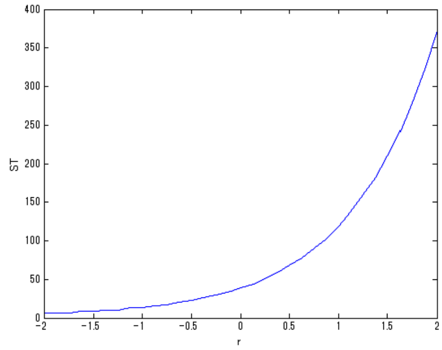

図 4　整定時間

図 4 から r が大きくなるにつれ、整定時間が延びていくことがわかる. 入力 u が減少するにつれ、初期軌道から目標軌道に到達する時間が延びるためである.

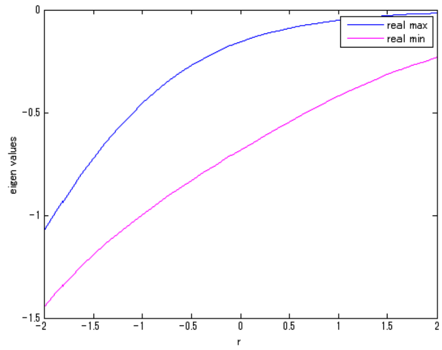

図 5　固有値

図 5 から r が大きくなるにつれ、最大の固有値が 0 に近づいていくことが分かる. これはフィードバックゲイン K の減少が入力 $u = -Ke$ の減少につながり、固有値の実部が大きくなるため入力 $u = -Ke$ による減衰率が下がり整定が遅くなる。

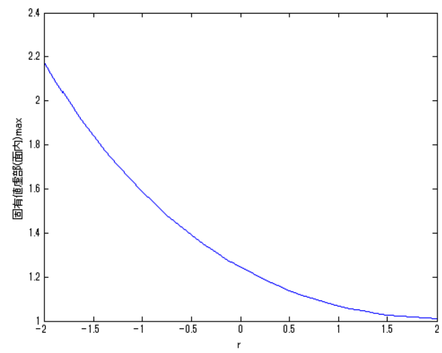

図 6　固有値虚部 / 面内

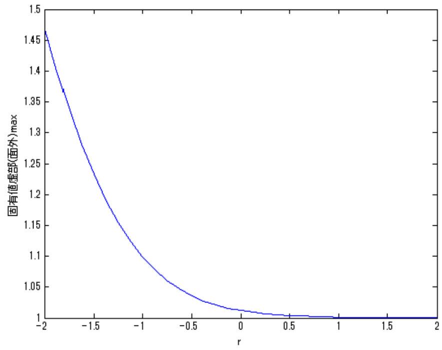

図 7　固有値虚部 / 面外

r が大きくなるにつれ、面内、面外ともに固有値の虚部の最大値は 1 に近づいていく.

6　固有値の実部と、整定時間の関係

5 章で得た固有値の実部、虚部と整定時間の関係をグラフに出力する.

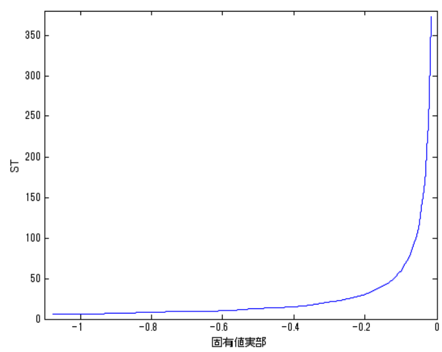

図 8　固有値実部 / 整定時間

固有値の実部が 0 に近づいていくにつれ、整定時間が延びていくという結果が得られた.

6.1　固有値の虚部と燃料消費の関係

固有値の虚部と、燃料消費の関係をグラフに出力する為、本研究では固有値の虚部に 6.2×10^{-3} を掛け、グラフに出力した.

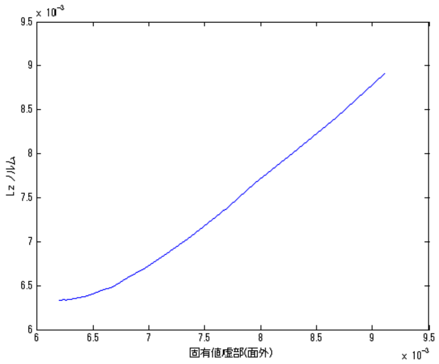

図 10　固有値虚部 (面外) / L_z ノルム

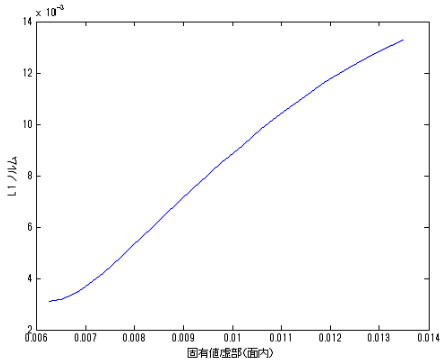

図 9　固有値虚部 (面内) / L_1 ノルム

面内の固有値の虚部が 0.0135, 面外の固有値の虚部が 0.0091 に近づいていくにつれ、L_1,L_z ノルムが増加していき、燃料消費が増大していくという結果が得られた.

7　おわりに

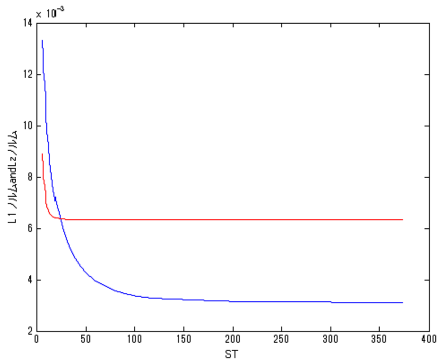

図 11　$(r)ST - L_1$ ノルム,L_z ノルム

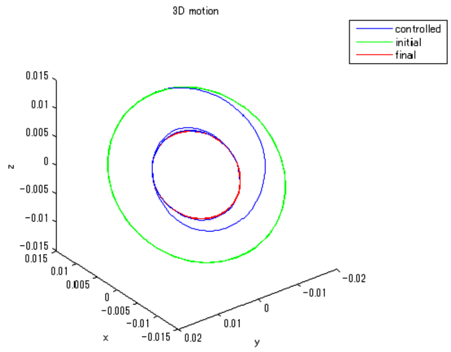

図 12　シミュレーション

freemotion						
	固有値1	固有値2	固有値3	固有値4	固有値5	固有値6
実部	0	0	0	0	0	0
虚部	0	0	i	−i	i	−i

図 13　フリーモーション 固有値

虚部	1	2	3	4	5	6
初期値	2.174i	−2.174i	0.2322i	−0.2322i	1.469i	−1.469i
収束値	0.1966i	−0.1966i	1.0103i	−1.0103i	1.0001i	−1.0001i

実部	1	2	3	4	5	6
初期値	−1.2996	−1.2996	−1.447	−1.447	−1.08	−1.0762
収束値	−0.2316	−0.2316	−0.076	−0.076	−0.02	−0.0158

図 14　固有値 実部 虚部

本研究では、Q の値を固定し、R の重みを変化させ、固有値が、L_1 ノルム、L_z ノルム、整定時間とどのような関係を持つかを研究した。シミュレーション結果から、固有値の実部の-0.0158 への収束し、虚部（面内）の 1.013 への収束、虚部（面外）1.001 への収束が、L_1 ノルム、L_z ノルムの減少、整定時間の増大を示す関係がわかった. また r の値が大きくなっていくにつれて、固有値の虚部が i,$-i$ に収束していき、人工衛星の角周波数がフリーモーション時の角周波数に近づいていくという関係が分かった.

参考文献

[1] A. Ichikawa:Recent Developments in Formation Flying, Lecture Notes ver.1, 2010.

[2] M. Shibata and A. Ichikawa:Orbital Rendezvous and Flyaround Based on Null controllability with Vanishing Energy, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 30, No. 4, pp. 934-945, 2007.