錯視立体の作製

2010SE194 島田悠史

指導教員：杉浦洋

1 はじめに

本稿で扱う「錯視立体図」は，立体感を持つと同時に，実現不可能な立体であると矛盾した認識をするような図のことである．このような図を投影図にもつ立体があるかという幾何学的な問題と，なぜ人によって図から立体を読み取るとき認識に差異が生じるのかという知覚の問題の両方に対して，線形代数を用いてアプローチしていく．さらに，実際と凹凸や傾斜が全く違って見える「錯視立体」を，実際に作製することが本稿の目標である．

2 立体復元方程式

前章に挙げた頂点辞書で分析する投影図は点，線，面からなる二次元の図である．この投影図から得られた点，線，面について考えていく．

まず，点の集合を U とし，点に 1 から $|U|$ まで通し番号をつけて $u_1, u_2, \ldots, u_{|U|}$ とおく．ここで，$|A|$ は集合 A の要素数とする．第 i 節点 u_i の線画上での座標を (x_i, y_i) とする．線画は与えられるから，x_i，y_i は既知の実数値である．この節点を投影図にもつもとの立体の頂点を v_i とおき，その座標を (x_i, y_i, z_i) とする．x_iと y_i の値はわかっているため z_i だけが未知数である．

次に，線画に描かれている面の集合を F とおき，面にも 1 から $|F|$ まで通し番号をつける．それを f_1，f_2，...，$f_{|F|}$ とおく．第 j 面 f_j は平面多角形である．視点が一般の位置にあるという仮定から，それを含む平面は，xy-平面と垂直ではないので，その方程式は

$$a_j x + b_j y + z + c_j = 0 \tag{1}$$

と書ける．a_j，b_j，$c_j (1 \leq j \leq |F|)$ はいずれも未知数である．よって立体復元方程式は，すべての $u_i \in f_j$ に対して

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j = 0 \tag{2}$$

以上で立体復元方程式が得られた。立体復元方程式は次の二つの性質がわかる．

1. 立体復元方程式は斉次線形方程式、自明な解であり，自明な解 (xy-平面上の平面解) を持つ．
2. 自明でない解を持つ場合、解の自由度は 4 以上である．

3 遠近感と遠近不等式

線画平面上の点 (x_i, y_i) を通り z 軸に平行な直線が上の平面と交わる点の z 座標を z_i とおくと点 (x_i, y_i, z_i) は式 (1) を満たす．すなわち

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j = 0 \tag{3}$$

が成り立つ．先に述べたように頂点 v_i が平面より視点から奥にあるため

$$z_i < z_i = -a_j x_i - b_j y_i - c_j \tag{4}$$

これを書き直し，

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j \quad \leq 0 \tag{5}$$

が得られる．これと同じ考え方で頂点 v_i が平面より視点から近くにある場合は

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j \geq 0 \tag{6}$$

で表すことができる．

そして，この遠近不等式と立体復元方程式を連立させることにより，この問題を基本的な線形計画問題として考えることができる．この線形計画問題の解が存在するとき，与えられた解釈をもつ立体が存在し，解が存在しないとき，与えられた解釈をもつ立体が存在しないことになる．つまりは，立体復元方程式と遠近不等式を連立させた線形計画問題の解が存在する場合，与えられた線画を立体化することが可能であり，目的であっただまし絵を立体化可能か否かを数学的に判定できる．

具体的には，線形計画法の実現可能解を求めるアルゴリズムにより，解の有無を判定できる．また，解が存在すれば，それを得ることができる．

4 遠近反転法

不可能立体の絵と言われるだまし絵から立体を作りたい．しかし，多くの不可能立体はその名のとおり，立体にすることは不可能である．でも，わずかではあるが，不可能立体のだまし絵の中には立体にできるものがある．そこで，だまし絵を立体化する前に，立体化できる可能性のあるだまし絵を描く杉原の遠近反転法 [3] について述べる．

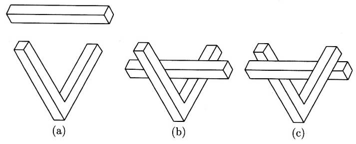


図 1 遠近反転法を用いただまし絵「V と棒」

図 1(a) は，1 本の角材からなる立体と，2 本の角材を V 字型につないでできた立体の投影図である．空間で V 字

型立体の隙間にもうひとつの角材を素直に通すと，同図の(b)に示す投影図が得られる．これは実際にあり得る状況を描いた正しい絵である

次に，図1(b)の絵のなかで，見えている部分とその後ろに隠されている部分を入れ替えると，同図の(c)の絵が得られる．これはだまし絵といってよいであろう．なぜなら立体どうしの前後関係が普通ではないからである．

どう普通ではないかをもう少し詳しく説明すると次のとおりである．

図1(a)に書かれた横向きの角材は，右側の切り口が見えていて左側の切り口は見えていない．だから，左より右のほうが視点に近いと解釈できる．一方，V字型の立体は左側の切り口が見えていて，右側は見えないから，右より左のほうが視点に近いと解釈できる．しかし，図1(c)では，この遠近関係に反するように立体が組み合わされている．つまり，視点に近い部分が，視点から遠い部分に隠されているように見える．これが，この絵をだまし絵と感じる理由である．

5　線形計画問題

擬似投影図から面と頂点，及び頂点以外の特徴点を抽出する．面や点に番号をつけたものが図2である．

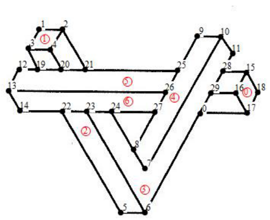


図2　面と頂点，及び特徴点を抽出した図

点データは $P = (p_1, p_2, \cdots, p_l)$ 面データは $S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ とする．

これに基づき，立体復元方程式，遠近不等式を立てる．

未知数は a_i, b_i, c_i, z_j とする．立体復元方程式，遠近不等式を満たす解を求める．この問題は，適切な目的関数を設定すれば線形計画法の問題となる．

線形計画法の標準問題とするために，符号の定まらない未知数 ai, bi, ci に対してスラック変数

$$a_i^+,\ a_i^-,\ b_i^+,\ b_i^-,\ c_i^+,\ c_i^- \geq 0 \tag{7}$$

を設定し，

$$a_i = a_i^+ - a_i^-,\ b_i = b_i^+ - b_i^-,\ c_i = c_i^+ - c_i^- \tag{8}$$

とする．

目的関数としては，

$$C = \sum_{j=1}^{L} z_j \tag{9}$$

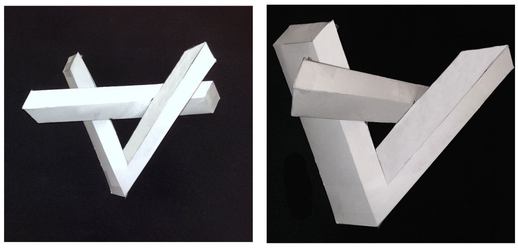
を採用した．

このままで線形計画問題を解くと，自明な解

$$z_j = 0 \qquad (1 \leq j \leq L) \tag{10}$$

しか得られない．これはすべての点が xy 平面上にある平面解である．そこで，いくつかの点の z 座標を適切に設定して，平面解を回避する．

だまし絵「Vと棒」に対し，線形方程式，不等式の解から立体の数値データを作成し，その展開図を計算機で描く．それらを紙工作で作製したものが以下の図である．(a)はだまし絵として見える視点，(b)は別の視点から撮影したものになる．



(a)　(b)

図3　だまし絵「Vと棒」を立体化した錯視物体

6　おわりに

杉原 [1，2，3] を参考に，投影図の定性的解釈について考察した．定性的解釈が頂点にワードを割り振り，それに従って辺にアルファベットを割り振ることにより，面の前後関係が復元できることが分かった．ある種の錯視投影図においては，頂点に対するワードの割り振りと辺に対するアルファベットの割り振りが矛盾し，それが錯視観を与える．この種の投影図に対応する多面体は存在しない．別の種類の錯視投影図では辺に対するアルファベットの割り振りが成功するが，厚みのある多面体として実現されない．さらに，同じ投影図から全く違った多面体が復元できる．これらについては立体復元方程式，遠近不等式の解の有無によって，投影図にする立体が存在することが証明できた．最後に，実際に不可能立体のだまし絵を立体化した作品を設計し，作製した．

7　参考文献

[1] 杉原 厚吉 :『だまし絵と線形代数』．共立出版，東京，2008.

[2] 杉原 厚吉 :『全学自由研究ゼミナール「視覚の数理」』，第2部　不可能空間の心理と数理

[3] 杉原 厚吉:『立体イリュージョンの数理』．共立出版，東京， 2006.