

3自由度ヘリコプタに対するディスクリプタ表現を用いた ロバストLQ制御

2010SE178 大藪 祥子

指導教員：高見 勲

1 はじめに

本研究では、モデリングの際の近似誤差によって生じる特性変動と機体に重りを載せることで生じる特性変動に対してポリトープシステムを用いてロバスト安定性を保証する。状態空間表現において変動パラメータが有理関数の形で入っているため、ディスクリプタ表現を用いることで変動パラメータに対して一次式の形を導出し、ポリトープ表現を可能にする [1]。制御性能の向上にはLQ最適制御を用いる。また、有効性をシミュレーションにより検証する。

2 制御対象とモデリング

2.1 状態空間表現の導出

本研究で用いる3自由度ヘリコプタの簡略化した図を図1に示す。3自由度ヘリコプタは前後に2つのロータを持つヘリコプタであり、支持棒を介して土台に固定されている。点Oを中心として垂直方向のエレベーション方向、水平方向のトラベリング方向に前後のロータを操作することによって運動する。図のように、エレベーション角を $\epsilon(t)$ [rad]、トラベリング角を $\lambda(t)$ [rad]、ピッチング角を $\rho(t)$ [rad]とする。前後のロータにそれぞれ入力する電圧 $V_f(t)$ [V]、 $V_b(t)$ [V]を適切に操作することで $\epsilon(t)$ と $\lambda(t)$ を目標値に追従させる制御系を設計する。

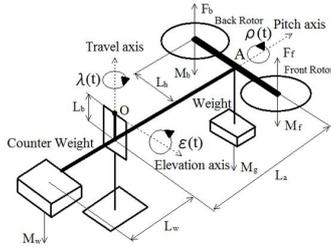


図1 3DOFヘリコプタの簡略図

3自由度ヘリコプタの非線形運動方程式をLagrangeの運動方程式を用いて導出する。本研究で用いるパラメータを、 M_f, M_b :フロントロータ、バックロータの質量、 M_c :カウンターウェイトの質量、 M_g :機体中心に吊るす重りの質量、 L_a :土台中心から車体までの距離、 L_h :機体重心からロータ中心までの距離、 L_w :土台中心からカウンターウェイト中心までの距離、 L_b :土台から支持棒までの距離、 K_f :ロータの揚力係数とし、状態変数 $x(t)$ を $x(t) = [\epsilon, \rho, \lambda, \dot{\epsilon}, \dot{\rho}, \dot{\lambda}]^T$ 、入力 $u(t)$ を $u(t) = [V_f, V_b]^T$ とする。導出した運動方程式を平衡点で線形化すると以下の状態空間表現が得られる。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{a_1}{J_\epsilon} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{J_\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{b_1}{J_\epsilon} & \frac{b_2}{J_\epsilon} \\ \frac{b_3}{J_\rho} & \frac{b_4}{J_\rho} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [I_3 \quad \mathcal{O}_{3,3}]$$

$$J_\epsilon = (M_f + M_b + M_g)(L_a^2 + L_b^2) + M_w(L_w^2 + L_b^2)$$

$$J_\rho = (M_f + M_b)L_h^2$$

$$J_\lambda = (M_f + M_b)(L_a^2 + L_b^2) + M_w L_w^2 + M_g L_a^2$$

$$a_1 = -(M_f + M_b + M_w + M_g)L_b g$$

$$a_2 = -(V_{f0} + V_{b0})K_f \sqrt{L_a^2 + L_b^2}$$

$$b_1 = b_2 = K_f \sqrt{L_a^2 + L_b^2}, b_3 = -b_4 = K_f L_h$$

行列 A において変動パラメータが有理関数の形で入っているためポリトープ表現ができない。そこで、ディスクリプタ表現を用いて変動パラメータに対し、一次式の形を導出する。

2.2 ディスクリプタ方程式の導出

ディスクリプタ変数を $x_d(t) = [x(t)^T, \dot{\epsilon}, \dot{\rho}, \dot{\lambda}, u(t)^T]^T$ とすると、ディスクリプタ方程式は式(2)のようになる。

$$E_d \dot{x}_d(t) = A_d x_d(t) + B_d u(t) \quad (2)$$

$$E_d = \text{diag}\{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_\epsilon & 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_\rho & 0 & b_3 & b_4 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_d = [\mathcal{O}_{2,9} \quad I_2]^T$$

3 制御系設計

本研究では、最適レギュレータ問題をLMIに帰着し、行列ポリトープ表現を用いることでロバスト安定化制御器を設計する。

3.1 拡大系の導出

出力を目標値に定常偏差なく追従させるために拡大系の導出を行う。拡大系の状態変数を $x_e(t) = [\int e_e dt, \int e_\lambda dt, x_d(t)^T]^T$ とするとシステムの拡大系は以下のようなになる。

$$E_e \dot{x}_e(t) = A_e x_e(t) + B_e u(t) \quad (3)$$

$$E_e = \begin{bmatrix} I_2 & \emptyset_{2,11} \\ \emptyset_{11,2} & E_d \end{bmatrix}, A_e = \begin{bmatrix} -C_e & \emptyset_{2,5} \\ \emptyset_{11,2} & A_d \end{bmatrix}$$

$$B_e = \begin{bmatrix} \emptyset_{2,2} \\ B_d \end{bmatrix}, C_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2 LQ 最適制御

システムに対し、評価関数 J を次のように定義し、最小化を行う。

$$J = \int_0^\infty (x_e(t)^T Q x_e(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (4)$$

$u(t) = K x_e(t)$, $Y = KX$ とする時、以下の LMI を満たす X, Y が存在すればシステムは安定である。ここで求める状態フィードバックゲイン K_1 は $K_1 = Y_1 X_{11}^{-1}$ で導出される。

$$\begin{bmatrix} H_e[A_e X + B_e Y] & X^T Q^{\frac{1}{2}T} & Y^T \\ Q^{\frac{1}{2}} X & -I & O \\ Y & O & -R^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} Z & I \\ I & X \end{bmatrix} 0 \succ 0, \gamma - \text{trace}(Z) > 0 \quad (6)$$

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}, X_{11} > 0 \quad (7)$$

$$Y = [Y_1 \ 0], K = [K_1 \ 0] \quad (8)$$

$$(P = X^{-1} \prec Z, J < \gamma) \quad (9)$$

3.3 ポリトープ型制御系設計

モデリングの際、入力 $V_f(t) + V_b(t)$ を機体をホバリングさせる入力 $V_{f0} + V_{b0}$ として近似を行った。この誤差により生じる特性変動に対してロバスト安定性を保証する。また、機体に重りを載せた場合に起こる特性変動に対してもロバスト安定性を保証する。入力 $V_{f0} + V_{b0}$ の変動範囲と重りの質量 M_g の変動範囲は以下のように表される。

$$V_{f0} + V_{b0} \in [V_{f0,min} + V_{b0,min}, V_{f0,max} + V_{b0,max}] = [13.0, 44.0] \quad (10)$$

$$M_g \in [M_g, min, M_g, max] = [0, 0.15] \quad (11)$$

式 (10), (11) のポリトープ集合を用いてシステム行列 A_e の端点を次のようにする。

$$A_{e0} = A_e(M_g, max, V_{f0, max} + V_{b0, max}) \quad (12)$$

$$A_{e1} = A_e(M_g, min, V_{f0, max} + V_{b0, max}) \quad (13)$$

$$A_{e2} = A_e(M_g, max, V_{f0, min} + V_{b0, min}) \quad (14)$$

$$A_{e3} = A_e(M_g, min, V_{f0, min} + V_{b0, min}) \quad (15)$$

本研究でのシステムはポリトープ型のため、各端点で安定ならば各端点で囲まれた範囲においても安定である。ここで、重み行列 Q, R は以下のように定める。

$$Q = \text{diag}\{100 \ 1 \ 100 \ 1 \ 10 \ 10 \ 10 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} \quad (16)$$

$$R = \text{diag}\{0.1 \ 0.1\} \quad (17)$$

4 シミュレーション

$M_g=0.00[\text{kg}]$ の場合、 $M_g=0.15[\text{kg}]$ の場合で、エレベーションを目標値 $\epsilon(t)=-10[\text{deg}]$, $\epsilon(t)=15[\text{deg}]$ に追従させるシミュレーションを図 2, 図 3 に示す。また、 $\epsilon(t)=-10[\text{deg}]$ かつ $M_g=0.00[\text{kg}]$ の場合、 $\epsilon(t)=-10[\text{deg}]$ かつ $M_g=0.15[\text{kg}]$ 場合、 $\epsilon(t)=15[\text{deg}]$ かつ $M_g=0.00[\text{kg}]$ の場合、 $\epsilon(t)=15[\text{deg}]$ かつ $M_g=0.15[\text{kg}]$ の場合で、トラベリングを目標値 $\lambda(t)=-120[\text{deg}]$ に追従させるシミュレーションを図 4 に示す。

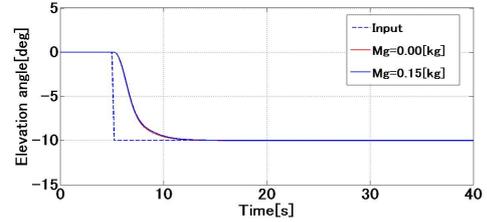


図 2 $\epsilon(t)=-10[\text{deg}]$

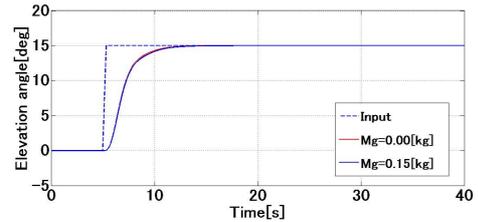


図 3 $\epsilon(t)=15[\text{deg}]$

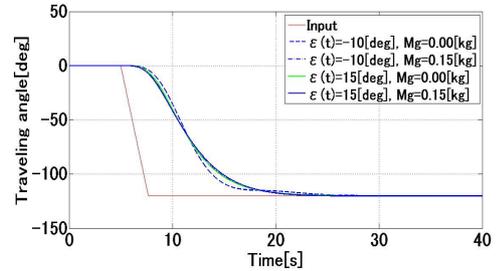


図 4 $\lambda(t)=-120[\text{deg}]$

図 2, 図 3, 図 4 より、各場合において安定した応答を示し、特性変動に対するロバスト安定性を確認することができた。

5 おわりに

本研究では、ポリトープシステムに対し、ディスクリプタ表現を用いてロバスト安定性をシミュレーション上で保証した。今後の課題は、実験においてロバスト安定性を確認することである。

参考文献

- [1] 増淵泉, 示村悦次郎: ゲインスケジューリング系の設計におけるディスクリプタ形式の利用について, システム制御情報学会論文誌, Vol.12, No.7, pp.390-394, 1999