形式的に記述された金融取引契約の等式変換の正しさ

2010SE177 大薮雅人

担当教員:横山哲郎

1　はじめに

金融取引契約とは，金融や保険業界で用いられる取引契約のことで，これらの契約はより単純な契約を組み合わせてできている．この点に注目して，文献 [1] では，契約を関数型言語の結合子を用いて形式的に記述することで，既存の契約だけではなく，新たな契約も簡単に記述することができ，その価値も評価することができる方法を提案している．また，この文献の中で，契約の等式変換の一部は紹介されているが，その論証はされておらず，形式的に記述された等式変換の正しさは示されていない．

本研究の目的は，この形式的に記述された金融取引契約の新たな等式変換を発見し，その論証を行うことで正しさを示し，その結果から金融取引契約の最適化に応用できる等式変換の例を示すことである．ただ，これらの等式変換には，一見等しそうだが等しくない等式が含まれていることもあるので，注意して取り組む必要がある．

以上の目的を達成するために，以下の 3 つの課題を設定した．1 つ目は，形式的に記述された金融取引契約の等式変換の探索を行うことである．2 つ目は，発見した等式変換や文献 [1] の中で紹介されている等式変換の論証を行うことである．3 つ目は，それらの結果から金融取引契約の最適化に応用できる等式変換の例を示すことである．

以上の課題を解決することにより，以下の 2 つの効果が期待される．1 つ目は，形式的に記述された金融取引契約間の関係の正しさを示すことにより，より多くの形式的な金融取引契約の正しさを示すことができるようになることである．2 つ目は，金融取引契約の最適化に応用できる等式変換の例を示すことで，より簡単な契約の組み合わせとして表すことができるようになることである．

2　等式変換の論証

新たに発見した形式的に記述された金融取引契約の等式変換とその正しさを論証をすることにより示す．また，一見等しそうだが等しくない等式が等しくならないことも反例を示すことにより示す．まず，確率変数上での代数規則を説明し，その代数規則を価値評価過程における代数規則へと持ち上げる．次に，金融取引契約の形式的な記述に必要な命名慣習，関数および合成的意味論を説明する．そして，それらを踏まえて等式変換の論証を行う．

2.1　確率変数の上の代数規則

型 a 上の価値評価過程 p とは，時刻から型 a を持つ確率変数への関数である．また，確率変数 $p(t)$ は，時刻 t における p の可能な値を示すものである．これを非公式な型定義として以下のように書くことができる．

$$\mathcal{PR}\ a = Date \rightarrow \mathcal{RV}\ a$$

次に x, y, z を同じ標本空間上で定義された確率変数 $\mathcal{RV}\ \mathbb{R}$ とすると，$x +_{\mathcal{RV}} y$ や $x -_{\mathcal{RV}} y$ も同じ標本空間上の確率変数である．また，$max_{\mathcal{RV}}\ y\ z$ は y と z の内，最大値を返す演算である．これらより，確率変数の足し算 $+_{\mathcal{RV}}$ と最大値を返す $max_{\mathcal{RV}}$ に関して，以下の分配法則

$$x +_{\mathcal{RV}} max_{\mathcal{RV}}\ y\ z = max_{\mathcal{RV}}\ (x +_{\mathcal{RV}} y)\ (x +_{\mathcal{RV}} z) \quad (1)$$

が成り立つ．

2.2　価値評価過程における代数規則と証明

確率変数の足し算 $+_{\mathcal{RV}}$ を価値評価過程の足し算 $+_{\mathcal{PR}}$，確率変数の最大値を返す $max_{\mathcal{RV}}$ を価値評価過程の最大値を返す $max_{\mathcal{PR}}$，確率変数の単項マイナス演算子 $-_{\mathcal{RV}}$ を価値評価過程の単項マイナス演算子 $-_{\mathcal{PR}}$ に持ち上げることで定義する．それぞれの型と定義を以下に示す．

$$\begin{aligned}
&+_{\mathcal{PR}}, max_{\mathcal{PR}} :: \mathcal{PR}\ \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{PR}\ \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{PR}\ \mathbb{R} \\
&(+_{\mathcal{PR}})\ = lift_2\ (+_{\mathcal{RV}}) \\
&max_{\mathcal{PR}} = lift_2\ max_{\mathcal{RV}} \\
&-_{\mathcal{PR}} :: \mathcal{PR}\ \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{PR}\ \mathbb{R} \\
&(-_{\mathcal{PR}})\ = lift\ (-_{\mathcal{RV}})
\end{aligned}$$

ここにおける $lift$，$lift_2$ とは，

$$\begin{aligned}
&lift :: (a \rightarrow b) \rightarrow \mathcal{PR}\ a \rightarrow \mathcal{PR}\ b \\
&lift\ f\ a\ t = f\ (a\ t) \\
&lift_2 :: (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow \mathcal{PR}\ a \rightarrow \mathcal{PR}\ b \rightarrow \mathcal{PR}\ c \\
&lift_2\ f\ a\ b\ t = f\ (a\ t)\ (b\ t)
\end{aligned}$$

である．これらより，価値評価過程における足し算 $+_{\mathcal{PR}}$ と最大値を返す演算 $max_{\mathcal{PR}}$ に関して，以下の分配法則

$$x +_{\mathcal{PR}} max_{\mathcal{PR}}\ y\ z = max_{\mathcal{PR}}\ (x +_{\mathcal{PR}} y)\ (x +_{\mathcal{PR}} z) \quad (2)$$

が成り立つ．証明を以下に示す．

$$\begin{aligned}
LHS &= \{\ +_{\mathcal{PR}}\ \text{の定義と}\ max_{\mathcal{PR}}\ \text{の定義}\ \} \\
&\quad lift_2\ (+_{\mathcal{RV}})\ x\ (lift_2\ max_{\mathcal{RV}}\ y\ z) \\
&= \{\ lift_2\ \text{の定義}\ \} \\
&\quad \lambda t \rightarrow x\ t +_{\mathcal{RV}} max_{\mathcal{RV}}\ (y\ t)\ (z\ t) \\
&= \{\ +_{\mathcal{RV}}\ \text{の}\ max_{\mathcal{RV}}\ \text{への左分配法則 (1)}\ \} \\
&\quad \lambda t \rightarrow max_{\mathcal{RV}}\ (x\ t +_{\mathcal{RV}} y\ t)\ (x\ t +_{\mathcal{RV}} z\ t) \\
&= \{\ lift_2\ \text{の定義}\ \} \\
&\quad lift_2\ max_{\mathcal{RV}}\ (lift_2\ (+_{\mathcal{RV}})\ x\ y)\ (lift_2\ (+_{\mathcal{RV}})\ x\ z) \\
&= \{\ max_{\mathcal{PR}}\ \text{の定義と}\ +_{\mathcal{PR}}\ \text{の定義}\ \} \\
&\quad RHS
\end{aligned}$$

また，$\mathcal{K}$，$exch_k\ (\cdot)$ の価値評価過程を以下に示す．

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K} :: a \rightarrow \mathcal{PR}\ a \\
&exch_k\ (\cdot) : Currency \rightarrow \mathcal{PR}\ \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$\mathcal{K}(x)$ は常に値 x を持つ過程，$exch_{k_1}\ (k_2)$ は通貨 k_2 における 1 単位の価値を通貨 k_1 で表現した過程である．

2.3 金融取引契約に対する合成的意味論

契約 $zero$，one と契約を引数にとる関数 and，or および $give$ を定義する[1]．それぞれの型と定義を以下に示す.

$$
\begin{aligned}
&zero :: Contract\\
&one :: Currency \to Contract\\
&give :: Contract \to Contract\\
&and :: Contract \to Contract \to Contract\\
&or \;\; :: Contract \to Contract \to Contract
\end{aligned}
$$

$zero$ は，権利も義務もない契約，$(one\ k)$ は，通貨 k を 1 単位受け取る契約である．また，$(give\ c)$ は，c の権利をすべて義務として，逆に義務を権利として取得する関数，$(c_1$ 'and' $c_2)$ は，c_1 と c_2 の両方を取得する関数，$(c_1$ 'or' $c_2)$ は，c_1 か c_2 の一方 (両方ではない) を取得する関数である．次に，金融取引契約に対する合成的意味論を取り入れる．関数 $\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c]\!]$ は，契約 c をとって,「時間の中の各瞬間に対して，その瞬間に c を取得したときの価値を通貨 k で表したもの」を記述する過程へと写像するものである．今回用いる意味論を以下に示す.

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![\cdot]\!] \;::\; Contract \;\to\; \mathcal{PR}\ \mathbb{R}\\
(E1)\quad &\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![zero]\!] \;=\; \mathcal{K}(0)\\
(E2)\quad &\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![one\ k_2]\!] \;=\; exch_k\ (k_2)\\
(E3)\quad &\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![give\ c]\!] \;=\; -_{\mathcal{PR}}\ \mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c]\!]\\
(E4)\quad &\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c_1\ `and`\ c_2]\!] \;=\; \mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c_1]\!] +_{\mathcal{PR}} \mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c_2]\!]\\
(E5)\quad &\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c_1\ `or`\ c_2]\!] \;=\; max_{\mathcal{PR}}\ (\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c_1]\!])\ (\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c_2]\!])
\end{aligned}
$$

2.4 新たに発見した等式変換とその証明

以上の内容より，and の or に対する分配法則[2]

$$c_1\ `and`\ (c_2\ `or`\ c_3) = (c_1\ `and`\ c_2)\ `or`\ (c_1\ `and`\ c_3) \quad (3)$$

が成り立つ．証明を以下に示す.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![LHS]\!] &= \{\ \text{定義}\ \}\\
&\quad \mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c_1\ `and`\ (c_2\ `or`\ c_3)]\!]\\
&= \{\ E4\ \}\\
&\quad \mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c_1]\!] +_{\mathcal{PR}} \mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c_2\ `or`\ c_3]\!]\\
&= \{\ E5\ \}\\
&\quad \mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c_1]\!] +_{\mathcal{PR}} max_{\mathcal{PR}}\ (\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c_2]\!])\ (\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c_3]\!])\\
&= \{\ +_{PR}\ \text{の}\ max_{PR}\ \text{への左分配法則 (2)}\ \}\\
&\quad max_{\mathcal{PR}}\ (\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c_1]\!] +_{\mathcal{PR}} \mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c_2]\!])\ (\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c_1]\!] +_{\mathcal{PR}} \mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c_3]\!])\\
&= \{\ E4\ \}\\
&\quad max_{\mathcal{PR}}\ (\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c_1\ `and`\ c_2]\!])\ (\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![c_1\ `and`\ c_3]\!])\\
&= \{\ E5\ \}\\
&\quad \mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![(c_1\ `and`\ c_2)\ `or`\ (c_1\ `and`\ c_3)]\!]\\
&= \{\ \text{定義}\ \}\\
&\quad \mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![RHS]\!]
\end{aligned}
$$

2.5 一見等しそうだが等しくない等式とその証明

同様に，一見等しそうだが等しくない等式

$$give\ (c_1\ `or`\ c_2) \neq give\ c_1 `or`\ give\ c_2 \quad (4)$$

[1]本稿では，契約を c で，通貨を k で表す.
[2]本稿では，中置演算子を '·' で表す.

を反例を示すことで，証明する．$(E2)$ の特別な場合として，同じ通貨同士との為替レートが考えられる．この場合の価値評価過程を以下に示す.

$$(A1)\ exch_k\ (k) \;=\; \mathcal{K}(1)$$

そして，c_1=$zero$，c_2=$one\ k$ のとき，両辺はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![LHS]\!] &= \{\ \text{定義}\ \}\\
&\quad \mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![give\ (zero\ `or`\ one\ k)]\!]\\
&= \{\ E3, E5\ \}\\
&\quad -_{\mathcal{PR}}\ max_{\mathcal{PR}}\ (\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![zero]\!])\ (\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![one\ k]\!])\\
&= \{\ E1, E2\ \}\\
&\quad -_{\mathcal{PR}}\ max_{\mathcal{PR}}\ (\mathcal{K}(0))\ (exch_k\ (k))\\
&= \{\ A1\ \}\\
&\quad -_{\mathcal{PR}}\ max_{\mathcal{PR}}\ (\mathcal{K}(0))\ (\mathcal{K}(1))\\
&= \{\ \mathcal{K}(0)\ \text{と}\ \mathcal{K}(1)\ \text{の関係}\ \}\\
&\quad -_{\mathcal{PR}}\ \mathcal{K}(1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![RHS]\!] &= \{\ \text{定義}\ \}\\
&\quad \mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![max_{\mathcal{PR}}\ (give\ zero)\ (give\ one\ k)]\!]\\
&= \{\ E3, E5\ \}\\
&\quad max_{\mathcal{PR}}\ (-_{\mathcal{PR}}\ \mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![zero]\!])\ (-_{\mathcal{PR}}\ \mathcal{E}_{\mathrm{k}}[\![one\ k]\!])\\
&= \{\ E1, E2\ \}\\
&\quad max_{\mathcal{PR}}\ (-_{\mathcal{PR}}\ \mathcal{K}(0))\ (-_{\mathcal{PR}}\ exch_k\ (k))\\
&= \{\ A1\ \}\\
&\quad max_{\mathcal{PR}}\ (-_{\mathcal{PR}}\ \mathcal{K}(0))\ (-_{\mathcal{PR}}\ \mathcal{K}(1))\\
&= \{\ \mathcal{K}(0)\ \text{と}\ \mathcal{K}(1)\ \text{の関係}\ \}\\
&\quad -_{\mathcal{PR}}\ \mathcal{K}(0)
\end{aligned}
$$

となるので，この等式は等しくならないことがわかる．これは，(4) の左辺の契約では，契約相手に選択権があるのに対して，右辺では，契約の保有者が選択を行うという両者の現実世界での解釈が異なっていることにも合致する.

3 おわりに

本稿では，新たに発見した形式的に記述された金融取引契約の等式変換の正しさを，その論証を行うことで示した．また，一見等しそうだが等しくない等式についても，その反例を示すことで等しくならないことを示した．これらの論証により，形式的に記述された金融取引契約間の関係の正しさを示し，金融取引契約の最適化に応用できる等式変換の例を示すことができた．また，より多くの形式的な金融取引契約の正しさを示し，より簡単な契約の組み合わせとして表すことができるようになった.

今後の課題としては，更なる金融取引契約の等式変換の論証を行い，その結果を用いることで金融取引契約の数理構造を明らかにしていくことが考えられる.

参考文献

[1] Jones, S.P., Eber, J-M. and Seward, J.: Composing contracts: an adventure in financial engineering (functional pearl). *ACM SIGPLAN Notices*, Vol.35, No.9, pp.280-292 (2000).

[2] Anton van Straaten: Composing Contracts, available from ⟨`http://contracts.scheming.org/Contracts.html`⟩(accessed 2013-11-01).