

最適レギュレータとロバスト LQ を用いた ABS の制御 —最適レギュレータ理論とロバスト LQ 制御の比較—

2010SE161 小川航太郎

指導教員：高見勲

1 はじめに

アンチロック・ブレーキ・システム (ABS) は、タイヤがロックするのを防ぐように各車輪のスリップ率をコントロールすることにより、普段どおりの操縦をすることができる。今回の実験機ではスリップ率が 0.2 のときに制動力が最大になる。したがって、本研究ではスリップ率を 0.2 に保つことで車輪ロックを防ぎ、制動距離を短くすることを目的とする。本来 ABS の制御はスライディングモード制御やフィジィ制御が主流だが、本研究では最適レギュレータ制御理論を用い、ロバスト LQ 制御と比較してどれだけ正確に制御できるかを提示する。本研究では $V = 70[\text{km/h}]$ で走行する自動車を ABS ブレーキを用いて制動距離を短くすることで目的を達する。

2 モデリングと状態空間表現

本研究で用いる ABS 実験機の簡略したモデルを図 1[?] に示す。上の車輪が車の車輪、下の車輪が路面を表している。 $V[\text{km/h}]$ が 70, 35, 10 において上の車輪にかかるブレーキトルク τ_1 を操作することでスリップ率 λ を目標値 0.2 に追従させる制御則を設計する。上の車輪、下の車輪の角速度をそれぞれ $\omega_1(t), \omega_2(t)$ 、上の車輪、下の車輪をそれぞれ r_1, r_2 、車輪間の摩擦係数を $\mu(\lambda)$ 、回転軸から車輪間の接点までの距離を L 、線分 L と車輪間の接点の法線がなす角を φ とする。以下から角速度 $\omega_1(t), \omega_2(t)$ の (t) は省略する。上の車輪と下の車輪の角加速度、スリップ率は次のように示す[?]。 s, s_1, s_2 は $s = \text{sgn}(r_2\omega_2 - r_1\omega_1), s_1 = \text{sgn}(\omega_1), s_2 = \text{sgn}(x_2)$ の符号関数である。 $(M_g = \tau_g, M_1 = \tau_1, M_{10} = \tau_{10}, M_{20} = \tau_{20})$

$$\begin{aligned} \omega_1 = & s(\lambda)(c_{11}\omega_1 + c_{12}) + c_{13}\omega_1 + c_{14} \\ & + (c_{15}s(\lambda) + c_{16})s_1\tau_1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \omega_2 = & s(\lambda)(c_{21}\omega_1 + c_{22}) + c_{23}\omega_2 + c_{24} \\ & + c_{25}s(\lambda)s_1\tau_1 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{r_2\omega_2 - r_1\omega_1}{r_2\omega_2} \quad (3)$$

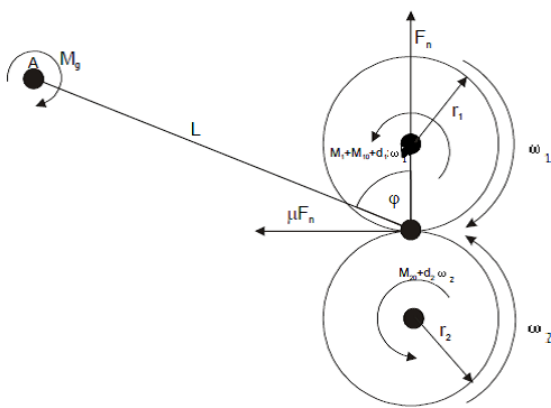


図 1 ABS 実験機の簡略図

ここで、 $c_{1i}, c_{2j} (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, j = 1, 2, 3, 4, 5)$ は定数であり、 $s(\lambda)$ は次式のようになる。

$$s(\lambda) = \frac{s\mu(\lambda)}{L(\sin(\varphi) - s\mu(\lambda)\cos(\varphi))} \quad (4)$$

式 (1),(2),(3) に対して、スリップ率の微分を式 (5) に示す。

$$\dot{\lambda} = f(\lambda, \omega_2) + g(\lambda, \omega_2)\tau_1, \omega_2 \neq 0 \quad (5)$$

ここで、 $f(\lambda, \omega_2), g(\lambda, \omega_2)$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned} f(\lambda, \omega_2) = & -((s(\lambda)c_{11} + c_{13})(1 - \lambda) + \frac{r_1}{r_2\omega_2}(s(\lambda)c_{12} + c_{14})) \\ & + \frac{1 - \lambda}{\omega_2}((s(\lambda)c_{21}\frac{r_2}{r_1}(1 - \lambda) + c_{23})\omega_2 + s(\lambda)c_{22} + c_{24}) \\ g(\lambda, \omega_2) = & -\frac{r_1}{r_2\omega_2}(c_{15}s(\lambda) + c_{16} - \frac{r_2}{r_1}c_{25}s(\lambda)(1 - \lambda)) \end{aligned}$$

式 (5) は非線形であるので、平衡点 $(\lambda^*, \tau_1^*, \omega_2^*)$ のまわりで線形近似すると以下のようになる。

$$\dot{\lambda} = (\frac{\alpha_1}{\omega_2} + \alpha_2)(\lambda - \lambda^*) + \frac{\beta}{\omega_2}(\tau_1 - \tau_1^*) \quad (6)$$

ここで、 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & \frac{\partial s(\lambda^*)}{\partial \lambda}(-\frac{r_1}{r_2}c_{12} + c_{22} - c_{22}\lambda^*) - (c_{22}s(\lambda^*) + c_{24}) \\ & - \frac{r_1}{r_2}(s(\lambda^*)c_{12} + c_{14}) + (1 - \lambda^*)(s(\lambda^*)c_{22} + c_{24}) \\ & - \frac{r_1}{r_2}(c_{15}s(\lambda^*) + c_{16} - \frac{r_2}{r_1}c_{25}s(\lambda^*)(1 - \lambda^*)) \\ & \times \frac{\partial s(\lambda^*)}{\partial \lambda}(\frac{r_1}{r_2}c_{15} + (1 - \lambda^*)c_{25} - c_{25}s(\lambda^*)) \\ \alpha_2 = & -\frac{(s(\lambda^*)c_{11} + c_{13})(1 - \lambda^*) + (1 - \lambda^*)(s(\lambda^*)c_{21}\frac{r_2}{r_1}(1 - \lambda^*) + c_{23})}{\frac{r_1}{r_2}(c_{15}s(\lambda^*) + c_{16} - \frac{r_2}{r_1}c_{25}s(\lambda^*)(1 - \lambda^*))} \\ & \times \frac{\partial s(\lambda^*)}{\partial \lambda}(-\frac{r_1}{r_2}c_{15} + (1 - \lambda^*)c_{25} - c_{25}s(\lambda^*)) \\ & - \frac{\partial s(\lambda^*)}{\partial \lambda}c_{11} + \frac{\partial s(\lambda^*)}{\partial \lambda}c_{11}\lambda^* + s(\lambda^*)c_{11} + c_{13} - c_{23} \\ & + c_{21}\frac{r_2}{r_1}(-2\lambda^*\frac{\partial s(\lambda^*)}{\partial \lambda} + 2s(\lambda^*) + 2\lambda^*s(\lambda^*) + \lambda^{*2}\frac{\partial s(\lambda^*)}{\partial \lambda}) \\ \beta_1 = & -\frac{r_1}{r_2}(c_{15}s(\lambda^*) + c_{16} - \frac{r_2}{r_1}c_{25}s(\lambda^*)(1 - \lambda^*)) \end{aligned}$$

本研究では、出力を目標値に追従させるために制御ループ内にスリップ率の偏差を状態変数に入れた。状態変数を $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T = [f(\lambda - \lambda^*) \ \lambda - \lambda^*]^T$ 、入力を $u(t) = \tau_1 - \tau_1^*$ とし、式 (6) より状態空間表現は次のようになる。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (7)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{\alpha_1}{\omega_2} + \alpha_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\beta_1}{\omega_2} \end{bmatrix}$$

3 制御系設計

最適レギュレータ理論[?]では可制御である状態方程式に対して評価関数 J は次式で表される。

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q_1 x(t) + u(t)^T R_1 u(t)) dt \quad (8)$$

(8) を最小化するような状態フィードバックゲイン K を求める。 Q, R はそれぞれ評価関数の重み行列である。この J を最小にする最適設計入力 は次式である。

$$u(t) = Kx(t) = -R_1^{-1}B^T Px(t) \quad (9)$$

ここで P はリカッチ方程式

$$PA + P^T P - PBR_1^{-1}B^T P + Q_1 = 0 \quad (10)$$

を満たす唯一の正定対称解である。
重み行列 Q, R は次式に示す。

$$Q_1 = \text{diag} [1000 \quad 100] \quad (11)$$

$$R_1 = 0.01 \quad (12)$$

評価関数 J を最小とするゲイン K は、

$$K_{70} = [-31.6228 \quad -33.7609] \quad (13)$$

$$K_{35} = [-31.6228 \quad -32.8866] \quad (14)$$

$$K_{10} = [-31.6228 \quad -32.2480] \quad (15)$$

4 行列ポリトープ表現

下の車輪の角速度 ω_2 [rad/s] は行列の中で有理化で表されており、変動パラメータである ω_2 の変動は

$$\omega_2 \in [\omega_{2min}, \omega_{2max}] = [14.0292 \quad 196.4085] \quad (16)$$

$\omega_2 = \omega_{2min}, \omega_{2max}$ の時の行列 A, B はポリトープ表現を用いて $A_{max}, A_{min}, B_{max}, B_{min}$ と表現する。

5 LMI 条件式

以下の LMI 条件式を用いて上限値 γ の最小化を行う。
($x_0 X^{-1} x_0 < \gamma, Z = X^{-1}$)

$$\begin{aligned} & \text{minimize : } Z \\ & \text{subject to } X_{11} > 0 \\ & \begin{bmatrix} -He[A_{max}X + B_{max}F] & X & F \\ X & Q_2^{-1} & O_{2 \times 1} \\ F & O_{1 \times 2} & R_2^{-1} \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} -He[A_{min}X + B_{min}F] & X & F \\ X & Q_2^{-1} & O_{2 \times 1} \\ F & O_{1 \times 2} & R_2^{-1} \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} Z & I_2 \\ I_2 & X \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

評価関数 Q_{2h}, R_2 とこれにより導き出されるゲイン K_{opt} は

$$Q_2 = \text{diag} [10 \quad 10] \quad (17)$$

$$R_1 = 0.01 \quad (18)$$

$$K_{opt} = [-31.4655 \quad -33.8666] \quad (19)$$

6 シミュレーションと実験結果

求めたゲインを用いてロバスト LQ 制御と比較したシミュレーションを行った。速度 70,50[km/s] の場合のスリップ率のシミュレーション結果を図??~図??に示す。

7 おわりに

本研究では、最適レギュレータを用いて制御し、ロバスト LQ 制御と比較した。スリップ率が目標値 0.2 に追従し、また車輪がロックせずに停止していることが分かる。シミュレーションでは最適レギュレータ、ロバスト LQ 制御の双方とも安定することがわかった。実験では、最適レギュレータだけだと発散しやすく、ロバスト LQ 制御の方が発散しにくいことが分かった。以上より、最適レギュレータを用いた時より、ロバスト LQ 制御を用いた方が安定する。

参考文献

- [1] 川田昌克,『MATLAB/Simulink による現代制御入門』, 森北出版, 東京,2011
- [2] inteco,『ABS The Laboratory Anti-lock Braking System User's Manual』
- [3] 蛭原義雄,『LMI によるシステム制御 ロバスト制御系設計のための体系的アプローチ』, 森北出版,2012

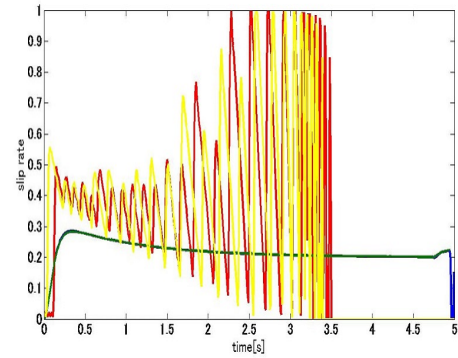


図 2 70[km/h] の時のスリップ率

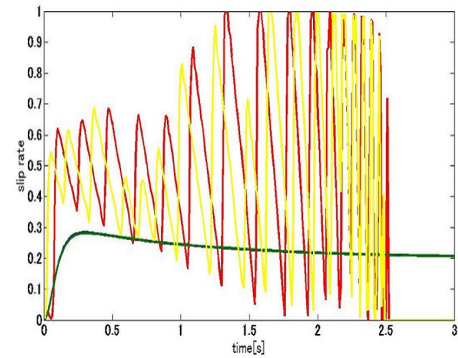


図 3 50[km/h] の時のスリップ率

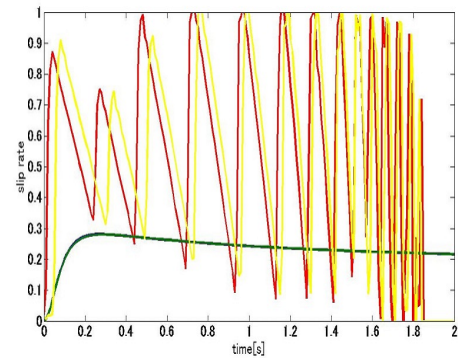


図 4 35[km/h] の時のスリップ率

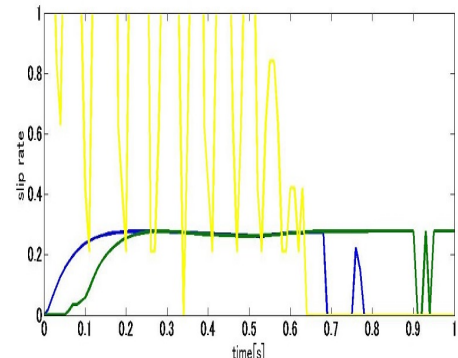


図 5 10[km/h] の時のスリップ率