# ポリトープ表現を用いた磁気浮上装置のロバスト安定化

2010SE148 中澤奈美
指導教員：高見勲

## 1　はじめに

制御器の設計は制御対象を数式モデルで表すことからはじまる．そのため，正しい数式モデルの導出がなければ正しい制御は望めない．本研究で用いる磁気浮上装置は電磁力定数が一定でない．この不確定なパラメータに対し，システム同定を行うことで厳密なモデルの導出を行う．さらに，変動パラメータである鋼球位置に対してはポリトープ表現を用いることでロバストな制御器を設計する．

## 2　制御対象とモデリング

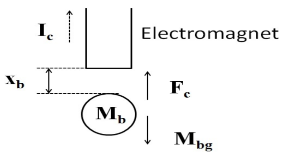


図 1　磁気浮上系の構成図

本研究の磁気浮上系は図 1 のような構成である．制御器からは電磁石に電流が入力され，その磁界による吸引力で鋼球位置を制御する．モデリングに用いる物理パラメータは，コイルの電流:$I_c$[A]，鋼球位置:$x_b$[m]，鋼球質量:$M_b$[kg]，重力加速度:$g$[m/s$^2$]，電磁力:$F_c$[N]，電磁力定数:$k$[Nm$^2$/A$^2$] である．

### 2.1　電気機械システムのモデリング

図 1 において，鋼球にニュートンの第二法則を用いると，

$$M_b \frac{d^2}{dt^2} x_b = M_b g - F_c \tag{1}$$

である．今，電磁力 $F_c$ は電流の二乗に比例し距離の逆二乗に比例することから $F_c = kI_c^2/x_b^2$ で与えられるが $x_b = 0$（電磁石と鋼球の距離が 0）となる時電磁力は，無限大になってしまうため，パラメータ $d$ を導入し

$$F_c = k\frac{I_c^2}{(x_b + d)^2} \tag{2}$$

と置く．これを，式 (1) に代入し運動方程式

$$\frac{d^2}{dt^2} x_b = g - \frac{kI_c^2}{M_b(x_b + d)^2} \tag{3}$$

を得る．式 (3) を平衡点 ($x_{b0}$，$I_{c0}$) の周りで線形化を行う．ただし，$x_{bl}$[m] を鋼球位置の微小変位，$I_{cl}$[A] を電流の微小変化とする．($x_b = x_{b0} + x_{bl}$ , $I_c = I_{c0} + I_{cl}$) ここで，状態変数を $x = [x_{bl}\ \dot{x}_{bl}]^{\mathrm{T}}$，$u = I_{cl}$ とすると状態方程式は以下のようになる．

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{x_{b0}+d} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-g}{(x_{b0}+d)\sqrt{\frac{M_b g}{k}}} \end{bmatrix} u \tag{4}$$

$$y = Cx = [1\ 0]x \tag{5}$$

### 2.2　最小二乗法によるシステム同定

式 (2) の $k$ と $d$ の同定を行う．平衡点 ($x_{b0}$，$I_{c0}$) で式 (1) の左辺の加速度は 0 となり，次式が成立する．

$$M_b g = k\frac{{I_{c0}}^2}{(x_{b0} + d)^2} \tag{6}$$

ここで，左辺 $M_b g$[N] は一定値である．実験で用いる鋼球の質量は 45g と 68g であり，それぞれ 0.441[N]，0.667[N] となる．各平衡点での鋼球位置 $x_{b0}$ と実験で得られた電流 $I_{c0}$ の実測値を基に，$k$ と $d$ の同定を行う．鋼球位置 $x_j$[mm] と，操作入力の実測値の平均 $I_j$[A] を表 1 に示す．

表 1　実験データ

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_j$ | 4.000 | 5.000 | 6.000 | 7.000 | 8.000 | 9.000 | 10.000 |
| $45gI_j$ | 1.036 | 1.084 | 1.174 | 1.320 | 1.361 | 1.478 | 1.562 |
| $68gI_j$ | 0.973 | 1.027 | 1.130 | 1.185 | 1.245 | 1.309 | 1.367 |

近似の誤差の二乗和

$$\rho(k,\, d) \ = \ \sum_{j=1}^{7} \left[ M_b g - \frac{kI_j^2}{(x_j + d)^2} \right]^2 \tag{7}$$

が最小となる $k$ と $d$ を導出する．ニュートン法で $d$ を求めると，鋼球質量が 45g の時 $d = 7.2756$[mm]，$k = 5.4194$[Nm$^2$/A$^2$] であり，同様に 68g の時 $d = 10.5569$[mm]，$k = 14.8475 \times 10^{-5}$[Nm$^2$/A$^2$] となる．この値から，$F_c$ の計算値

$$y_j \ = \ \frac{k{I_j}^2}{(x_j + d)^2} \tag{8}$$

と真値 $M_b g$ との誤差の絶対値 $e_j$[%] を求める．

$$e_j = \| \frac{M_b g - y_j}{M_b g} \| \times 100 \ [\%] \tag{9}$$

その結果を図 2 に示す．両鋼球質量とも真値との誤差は，5 %以内であるため，適切な解としてこの $k$ と $d$ の値を用いたモデルを使用する．

## 3　制御系設計

### 3.1　ポリトープ表現

鋼球位置 $x_{b0}$ を変化させても安定した浮上を実現させるため，ポリトープ表現を用い，鋼球位置に関してロバスト安定性を保証する．

$$\alpha = \frac{1}{(x_{b0} + d)} \tag{10}$$

と置き，$x_{b0}$[m] の変動範囲を，

$$x_{b0} \in [x_{b0 \cdot min},\, x_{b0 \cdot max}] = [4.0 \times 10^{-3},\, 10.0 \times 10^{-3}]$$

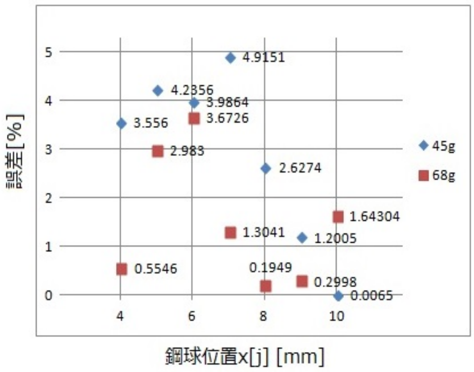


図 2　真値と計算値の誤差

と定めると，$\alpha$ の変動範囲は以下のように表される．

$$\alpha \in [\alpha_{min},\alpha_{max}] = [\frac{1}{x_{b0\cdot min}+d},\frac{1}{x_{b0\cdot max}+d}] \quad (11)$$

これより，式 (4) において，$\alpha$ を含んだ行列 A と B を以下のように表すことができる．

$$A_{min} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_{min} & 0 \end{bmatrix}, A_{max} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_{max} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{min} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-g}{\sqrt{\frac{gM_b}{k}}}\alpha_{min} \end{bmatrix}, B_{max} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-g}{\sqrt{\frac{gM_b}{k}}}\alpha_{max} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$A_{min}$ と $B_{min}$，$A_{max}$ と $B_{max}$ の 2 端点において安定となる制御系を設計すれば、ロバスト安定性は保証される．

### 3.2　拡大系の導出

さらに，出力 $y$ を目標値 $r$ に定常偏差なく追従させるために拡大系の導出を行う．偏差の積分を $w$ とし，拡大系の状態変数を $x_e = [w\ x^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ とすると，状態方程式の拡大系は次式となる．

$$\begin{aligned} \dot{x_e} &= A_e x_e + B_e u + B_r \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -C \\ 0 & A \end{bmatrix} x_e + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (13) \end{aligned}$$

$$y = C_e x_e = [0\quad C] x_e \quad (14)$$

### 3.3　LMI の定式化

拡大偏差系を安定化させる状態フィードバックゲイン $K$ を求めるため，評価関数 $J$ を最小化するような制御則 $u = Kx_e$ を考える．ここで，重み行列 $Q \in \Re^{3\times3} \geq 0$ と $R \in \Re > 0$ とする．

$$J = \int_0^\infty \{x_e{}^T Q x_e + u^T R u\} dt \quad (15)$$

式 (16) を満たす $X$，$Y$ が存在するならば，式 (14) のシステムは，$u = Kx_e = YX^{-1}x_e$ で安定化できる [1]．式 (16) について式 (12) の端点行列について連立して解くことで状態フィードバックゲイン $K$ を得る．

$$\begin{bmatrix} He[AX+BY] & X^{\mathrm{T}}(Q^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}}(R^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}} \\ Q^{\frac{1}{2}}X & -I & 0 \\ R^{\frac{1}{2}}Y & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\text{maximize}：\mathrm{tr}(X),\ X \succ 0 \quad (16)$$

## 4　シミュレーションと実験

45g，68g のそれぞれにおいてシミュレーションと実験を行う．はじめ，7[mm] のところで平衡状態を保ち，その後それぞれ 9[mm]，5[mm] へ目標値を変えた時のシミュレーションと実験結果を図 3，4 に示す．実験結果がシミュレーションとほぼ一致していること，ロバスト性が保証されたことが確認できる．

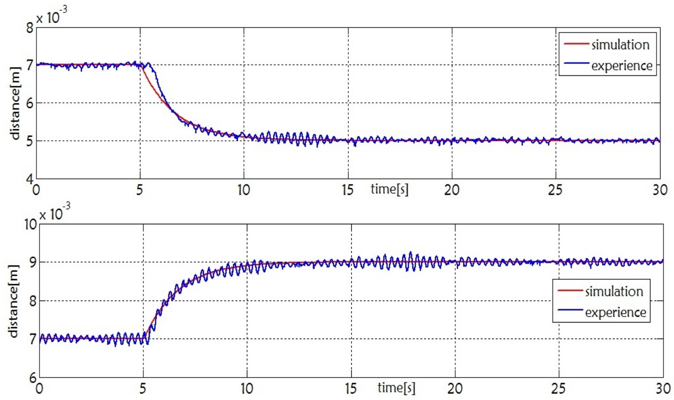


図 3　鋼球質量 45g のシミュレーションと実験結果

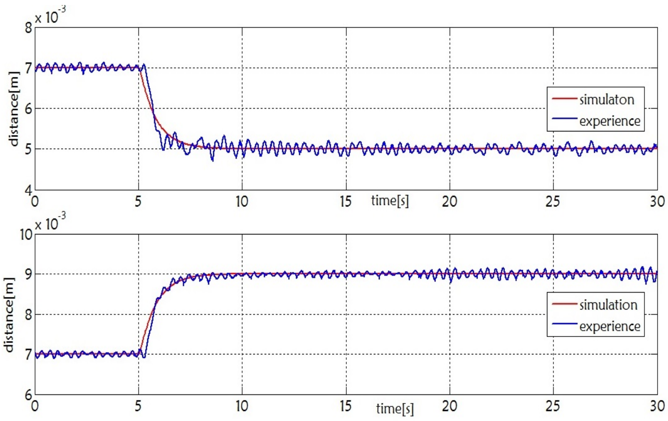


図 4　鋼球質量 68g のシミュレーションと実験結果

## 5　おわりに

本研究で得られた成果を以下に示す．

- 電磁力定数 $k$ と定数 $d$ の同定によるモデルの導出
- ポリトープ表現を用いた制御器の設計
- 鋼球位置のロバスト安定性の実験による検証

## 参考文献


[1] Tomoya Kanada,Yusuke Watanabe and Gan Chen, Robast H2 Control for Two-wheeled inverted Pendu-lum Using LEGO Mindstoms, 2011 Australian Control Conference, 2011