

# LQ 制御を用いた Anti-lock Braking System のロバスト安定化

2010SE124 水野 辰哉

指導教員：高見 勲

## 1 はじめに

本研究では Anti-lock Braking System (ABS) に対し車体速度、摩擦係数の変動に対するロバスト性を保証する制御器を設計する。また、スリップ率を車輪のロックを防ぎ、かつ摩擦係数とコーナリングフォースの値が十分に高い 0.2 に安定させる事を目的とする。制御対象は非線形であるため、これを線形化する。またディスクリプタ表現、線形分数変換 (LFT) を用い行列ポリトープ表現で表すことで、変動パラメータを含む行列を LMI で定式化し、系を安定にする制御器を設計する。

## 2 制御対象とモデリング

### 2.1 モデルの線形化と状態方程式の導出

本研究で用いる ABS 実験機の簡略したモデルを図 1 に示す。上の車輪が車の車輪、下の車輪が道路を表している。上の車輪にかかるブレーキングトルク  $\tau_1$  を操作することでスリップ率  $\lambda$  を目標値 0.2 に追従させる制御則を設計する。上の車輪、下の車輪の角速度を  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$ , 上の車輪、下の車輪の半径を  $r_1$ ,  $r_2$ , 車輪間の摩擦係数を  $\mu(\lambda)$ , バランスレバーの回転軸から車輪間の接点までの距離を  $L$ , 線分  $L$  と車輪間の接点の法線がなす角を  $\varphi$ , 上の車輪にかかる垂直抗力を  $F_n$  とする。以下から角速度  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$  の  $(t)$  と  $\mu(\lambda)$  の  $(\lambda)$  は省略する。上と下の車輪の回転運動の運動方程式とスリップ率は次のように示す。

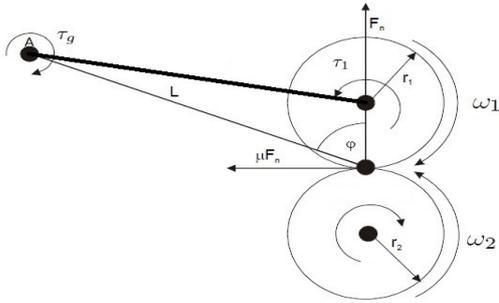


図 1 ABS 実験機の簡略図

$$J_1 \dot{\omega}_1 = F_n r_1 \mu - \tau_1 \quad (1)$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 = -F_n r_2 \mu \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{r_2 \omega_2 - r_1 \omega_1}{r_2 \omega_2} \quad (3)$$

垂直抗力  $F_n$  は以下ようになる。

$$F_n = \frac{\tau_g + \tau_1}{L(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)} \quad (4)$$

式 (1), (2), (3), (4) より、スリップ率の微分を式 (5) に示す。

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} = & \frac{1}{\omega_2} \left( -\frac{r_1^2 \tau_g \mu}{J_1 r_2 L (\sin \varphi - \mu \cos \varphi)} - \frac{r_2 (1 - \lambda) \tau_g \mu}{J_2 L (\sin \varphi - \mu \cos \varphi)} \right) \\ & + \frac{1}{\omega_2} \left( -\frac{r_1^2 \mu}{J_1 r_2 L (\sin \varphi - \mu \cos \varphi)} - \frac{r_2 (1 - \lambda) \mu}{J_2 L (\sin \varphi - \mu \cos \varphi)} \right) \\ & + \frac{r_1}{J_1 r_2} \tau_1 \end{aligned} \quad (5)$$

式 (5) は非線形であるので、平衡点  $(\lambda^*, \tau_1^*)$  のまわりで線形近似する [1]。また  $c_1, c_2, \dots, c_{12}$  は定数である。

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} = & \left( \frac{c_1 \mu^3 + c_2 \mu^2 + c_3 \mu + c_4}{\omega_2 (c_9 \mu^3 + c_{10} \mu^2 + c_{11} \mu + c_{12})} \right) (\lambda - \lambda^*) \\ & + \left( \frac{c_5 \mu^3 + c_6 \mu^2 + c_7 \mu + c_8}{\omega_2 (c_9 \mu^3 + c_{10} \mu^2 + c_{11} \mu + c_{12})} \right) (\tau_1 - \tau_1^*) \end{aligned} \quad (6)$$

本研究では、出力を目標値に追従させるために制御ループ内にスリップ率の偏差の積分を状態変数に入れた。状態変数を  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T = [\int (\lambda - \lambda^*) dt \ \lambda - \lambda^*]^T$ , 入力を  $u(t) = \tau_1 - \tau_1^*$  とし、式 (6) よりディスクリプタ方程式は次のようになる。

$$E \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} E = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \\ e = & c_9 \mu^3 + c_{10} \mu^2 + c_{11} \mu + c_{12} \\ a = & \frac{1}{\omega_2} (c_1 \mu^3 + c_2 \mu^2 + c_3 \mu + c_4) \\ b = & \frac{1}{\omega_2} (c_5 \mu^3 + c_6 \mu^2 + c_7 \mu + c_8) \end{aligned}$$

### 2.2 ディスクリプタ表現

行列  $A, B$  には不確かさ  $\omega_2, \mu$  があり、今のままではポリトープ表現をするのは難しい。そのため、不確かさを一つの係数行列にまとめる。ディスクリプタ変数を  $x_d(t) = [x(t) \ \dot{\lambda} \ u(t)]^T$  とすると、状態方程式のディスクリプタ表現は式 (8) となる。

$$E_d \dot{x}_d(t) = A_d x_d(t) + B_d u(t) \quad (8)$$

$$E_d = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & -e & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_d = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

### 2.3 線形分数変換 (LFT)

行列  $A_d$  には変動パラメータ  $\mu$  の重積がある。システムをアフィンな形にしポリトープ表現を出来るようにする。  $A_d$  を式 (9) と示す  $A_d$  の  $\mu$  の高次を含まない行列を  $A_n$ , 含む行列を  $B_\delta (I - \Delta D_\delta)^{-1} \Delta C_\delta$  とする。また、ディ

スクリプト変数を  $\tilde{x}_d(t)$  とすることで式 (8) は式 (10) と表せる.

$$A_d = A_n + B_\delta(I - \Delta D_\delta)^{-1} \Delta C_\delta \quad (9)$$

$$\tilde{E}_d \dot{\tilde{x}}_d(t) = \tilde{A}_d \tilde{x}_d(t) + \tilde{B}_d u(t) \quad (10)$$

$$\tilde{E}_d = \begin{bmatrix} E_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{x}_d = \begin{bmatrix} x_d(t) \\ z_\delta(t) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_d = \begin{bmatrix} A_n & B_\delta \Delta \\ C_\delta & D_\delta \Delta - I \end{bmatrix}, \tilde{B}_d = \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 2.4 行列ポリトープ表現

本研究では, 車速の変動範囲が  $10[\text{km/h}] \leq V \leq 50[\text{km/h}]$  の時に対してにロバスト安全性を保証する. また, 路面状況が変化した場合においてもロバスト安全性を保証する. 摩擦係数の変動範囲は  $0.1 \leq \mu \leq 0.7$  である. ここで  $X_2 := 1/\omega_2$  と変数変換し,  $X_2, \mu$  について行列ポリトープ表現で表す.

$$X_2 \in [X_{2min}, X_{2max}] = [0.0071, 0.0356] \quad (11)$$

$$\mu \in [\mu_{min}, \mu_{max}] = [0.1, 0.7] \quad (12)$$

行列  $\tilde{A}_d$  の変動範囲の端点行列を  $\tilde{A}_{d1}, \tilde{A}_{d2}, \tilde{A}_{d3}, \tilde{A}_{d4}$  とする.

## 3 LQ 制御系設計

$u(t)$  をフィードバック形式のコントローラ,  $Q$  を状態変数に対する重み,  $R$  を入力に対する重みとして次の評価関数  $J$  の最小化システムを考える.

$$J = \int_0^\infty (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (13)$$

$u(t) = Kx(t)$  とし, フィードバックゲイン  $K$  を  $\tilde{K}_d = \tilde{Y}_d \tilde{X}_d^{-1} = [K \ 0]$  とする. 以下の LMI を満たす  $\tilde{X}_d, \tilde{Y}_d$  が存在すればシステムは漸近安定であり,  $J$  は  $\gamma$  未満となる. ただし,  $\tilde{X}_d := P^{-1}, \tilde{Y}_d := \tilde{K}_d \tilde{X}_d$  である.

minimize :  $\gamma$

subject to  $X_{11} > 0$

$$\begin{bmatrix} He[\tilde{A}_{dk} \tilde{X}_d + \tilde{B}_d \tilde{Y}_d] & \tilde{X}_d^T (Q^{\frac{1}{2}})^T & \tilde{Y}_d^T (R^{\frac{1}{2}})^T \\ Q^{\frac{1}{2}} \tilde{X}_d & -I & 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \tilde{Y}_d & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

( $k = 1, 2, 3, 4$ )

$$\begin{bmatrix} W & I \\ I & X_{11} \end{bmatrix} > 0, \tilde{X}_d = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\tilde{Y}_d = [Y_1 \ 0], \text{trace}(W) < \gamma \quad (16)$$

## 4 シミュレーションと実験結果

$\mu$  の値が 0.1, 0.7, 0.17 の時のシミュレーションを行なった. 0.17 は使用する実験機での摩擦係数である. スリップ率と, 車体と車輪の速度のシミュレーション結果を図 2~7 に示す. また, 摩擦係数 0.17 においては実験結果も載せる. 車の初期速度は  $50[\text{km/h}]$  である. シミュレーションにおいて摩擦係数が 0.1, 0.17 の時はオーバーシュートが

あるがスリップ率は 0.2 に安定している. また 0.7 の時スリップ率は 0.2 にはかないが止まる時間が早く ABS の機能は果たしている. 実験結果では初めオーバーシュートがあるがほぼ 0.2 に安定している. しかし  $10[\text{km/h}]$  あたりから大きく振動してしまう.

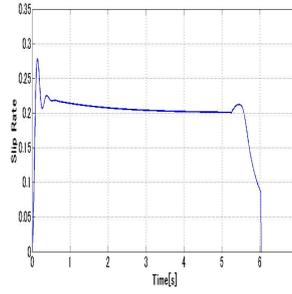


図 2  $\mu=0.1$ :スリップ率

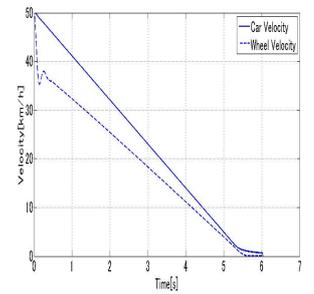


図 3  $\mu=0.1$ :車体と車輪の速度

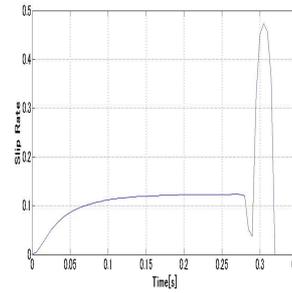


図 4  $\mu=0.7$ :スリップ率

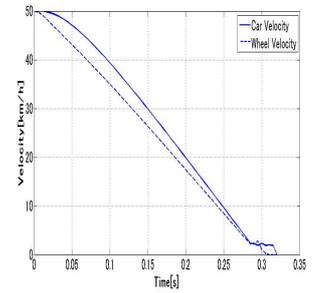


図 5  $\mu=0.7$ :車体と車輪の速度

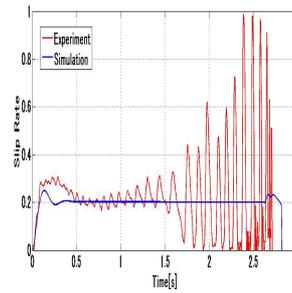


図 6  $\mu=0.17$ :スリップ率

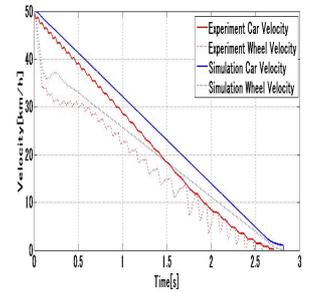


図 7  $\mu=0.17$ :車体と車輪の速度

## 5 おわりに

本研究では, 変動パラメータ  $\omega_2, \mu$  をポリトープで表現しロバスト性を安定させる制御器を設計した. シミュレーションではスリップ率は 0.2 に安定するものの, 実験では後半に大きく振動してしまう. 今後の課題は, 実験での後半の振動をなくすこと, また摩擦係数が 0.1, 0.7 の時の実験を行いロバスト安定性の検証を行うことである.

## 6 参考文献

- [1] Idar Petersen, Tor A. Johansen, Jens Kalkkuhl and Jens Ludemann, "Wheel Slip Control in ABS Brakes Using Gain Scheduled Constrained LQR", Proc. European Contr. Conf., Porto, pp.606-611.