長方形領域の再利用可能積分公式の設計

2010SE095 桂川　友香

指導教員：杉浦　洋

1　はじめに

本研究では，適応型積分法を考える．長方形領域の適応型積分法のアルゴリズムは「精度が低いと判定された小長方形を２等分する」という操作を繰り返して，必要な精度を達成する．このような数値積分法に用いる効率の良い積分公式を設計することが，本研究の目標である．

2　数値積分公式

基本正方形領域 $\Delta = [-1, 1]^2$ 上の関数 $f(x, y)$ の積分

$$If = \iint_\Delta f(\boldsymbol{p})dxdy, \quad \boldsymbol{p} = (x, y),$$

を近似する基本積分公式を,

$$I_n f = \sum_{l=1}^{n} \rho_i f(\boldsymbol{\pi}_i) \cong If$$

とする．$\boldsymbol{\pi}_i$, ρ_i $(1 \leq i \leq n)$ は標本点と重みである．

任意の s 次多項式 f に対し $I_n f = If$，ある $s+1$ 次多項式 f に対し $I_n f \neq If$ となる公式を s 次公式と言う．奇数 s 次公式の誤差指標を

$$Er = \sum_{k,l\geq 0}^{k+l=(s+1)/2} \left| \frac{I_n(x^{2k}y^{2l}) - I(x^{2k}y^{2l})}{I(x^{2k}y^{2l})} \right|$$

で定義する． 次数 s が高いほど，誤差指標 Er が小さいほど高精度である．

一般の長方形領域 D 上の定積分は，アフィン変数変換 $\boldsymbol{p} : \Delta \to D$ により，

$$I_n(D)f = \frac{S}{4} \sum_{i=1}^{n} \rho_i f(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\pi}_i)) \cong \iint_D f(x, y)dxdy$$

で近似する．ここで，S は D の面積である．

3　FS(Fully Symmetric：完全対称) 集合

基本領域 Δ をそれ自身に移す 8 つのアフィン変換 $(u, v) = \phi(x, y) = (\pm x, \pm y), (\pm x, \pm y)$ で不変な，Δ の部分集合を FS 集合という．点 $\boldsymbol{p} = (x, y)$ を上記 8 つのアフィン変換で移した点全体の集合を

$$\langle \boldsymbol{p} \rangle = \langle x, y \rangle = \{(\pm x, \pm y), (\pm x, \pm y)\}$$

と書き，アトムと呼ぶ．FS 集合はアトムの和集合である．標本点集合が FS 集合で重みが同一アトム内で等しいものを FS 公式という．本論文では FS 公式のみを扱う．

4　再利用性と R 集合

長方形領域 D 上での近似積分 $I_n(D)f$ の精度が悪いときは，x 軸あるいは y 軸と平行な直線で小長方形 D_0 と D_1 に２等分し，より精度の高い近似積分 $I_n(D_0)f + I_n(D_1)f$ を得る．この領域分割を D_0, D_1 以下にも再帰的に繰り返し，十分精度の高い近似積分値が得られる．このような領域分割による近似積分法を適用型積分則という．

$I_n(D), I_n(D_0), I_n(D_1)$ の標本点集合をそれぞれ，P, P_1, P_2 とするとき，領域分割に際し新しくできた標本点の数

$$C = |P_1 \cup P_2 - P|$$

を公式の分割コストという．C は小さいほど効率的である．

$P \subset P_1 \cup P_2$ であれば, 分割コストが小さくなり効率的である．$P \subset P_1 \cup P_2$ を満たす基本積分公式を R(Reusable: 再利用可能) 公式と言い，その標本アトムの集合を R 集合という．R 集合 A は，$\alpha = \langle \xi, \eta \rangle$, $\alpha_1 = \langle \varphi(\xi), \eta \rangle$, $\alpha_2 = \langle \eta, \varphi(\xi) \rangle$, $\varphi(x) = |2x - 1|$，として次の性質を持つ．

$$\alpha \in A \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 , \alpha_2 \in A.$$

この関係をグラフ的に表現して $\alpha \to \alpha_1, \alpha \to \alpha_2$ と書き，α は α_1, α_2 の子，α_1, α_2 は α の親という．A が R 集合であることと，任意の $\alpha \in A$ から出た親子グラフの矢印が A に終端を持つことは同値である．

5　FSR 則の構成

伊藤 [2] は座標の分母が 8 以下のアトムの集合 A_8 の，親子関係グラフ $G(A_8)$ を作成した．古田 [1] は、それから得られる 1 次則，3 次則，5 次則のための R 集合を全て手で拾い出し，そして，それらを標本点とする R 公式を作成し，その中から優良な公式を選抜した．しかし、後の検証によれば R 集合の数え上げは不完全であった．今回は、数え上げの手順を明確にし、完全なリストの作成を目指す．

6　系統別 R 集合リスト

A_8 の親子関係グラフ $G(A_8)$ は図 2 の様に，10 個の弱連結成分に分かれる．それらを，アトムの x 座標，y 座標それぞれの既約分母の最大奇数因数に基づき，11, 13, 15, 17, 33, 35, 37, 55, 57, 77 系統と呼ぶ．A_8 の R 集合を全て求めるには，各系統の R 集合をリストアップしてそのリストから 0 個あるいは 1 個の R 集合をとって和集合を作る．

7　１次則の構成

1 次則に用いる R 集合は，アトム 1 個からなる．そのような R 集合は 3 種．それら全てについて R 公式が存在す

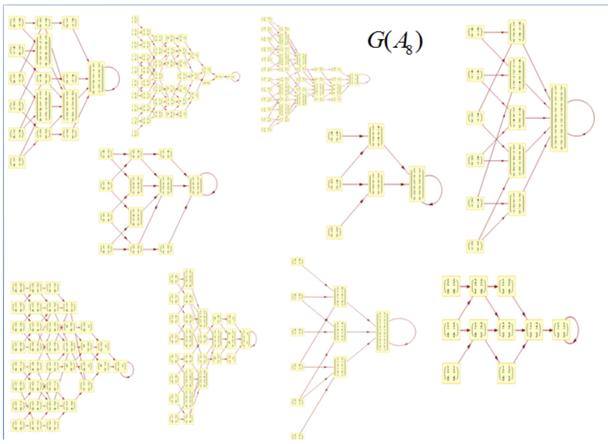

図 1　$G(A_8)$

表 1　1 次優良公式

No	α	n	C	Er
1	$\langle 1,1 \rangle$	4	2	2.00
2	$\langle \frac{1}{3},\frac{1}{3} \rangle$	4	4	0.67

表 2　3 次優良公式

No	α	n	C	Er
1	$\langle 1,1 \rangle$, $\langle 0,1 \rangle$	8	5	4.67
2	$\langle \frac{1}{3},\frac{1}{3} \rangle$, $\langle 1,1 \rangle$	8	6	1.63
4	$\langle \frac{1}{3},1 \rangle$, $\langle \frac{1}{3},\frac{1}{3} \rangle$	12	10	0.74

る．その中から選抜された 2 種の優良公式の標本 R 集合 α を表 1 に示す．左から α の通番 (No)，要素アトム，標本点数 n，分割コスト C，誤差指標 Er である．

8　3 次則の構成

3 次則に用いる R 集合は，アトム 2 個からなる．それらを 2 パターンに分けて数え上げた．
(1) 2 つの系統からアトム数 1 の R 集合を 1 つずつ採る．
(2) 1 つの系統からアトム数 2 の R 集合を 1 つ採る．
このようにして，9 種の R 集合をえ，優良公式 3 種を選抜した (表 2)．

9　5 次則の構成

5 次則に用いる R 集合は，アトム 4 個からなる．それらを 5 パターンに分けて数え上げた．
(1)　1 つの系統からアトム数 4 の R 集合を 1 つ採る．
(2)　1 つの系統からアトム数 3 の R 集合，1 つの系統からアトム数 1 の R 集合を採る．
(3)　1 つの系統からアトム数 2 の R 集合，1 つの系統からアトム数 2 の R 集合を採る．
(4)　1 つの系統からアトム数 2 の R 集合，1 つの系統からアトム数 1 の R 集合，1 つの系統からアトム数 1 の R 集合を採る．
(5)　4 つの系統からアトム数 1 の R 集合を 1 つずつ採る．ただし，アトム数 1 の R 集合は全体で 3 つしかないので

表 3　5 次優良公式

No	α	n	C	Er
4	$\langle 0,0 \rangle$, $\langle 0,1 \rangle$, $\langle 1,1 \rangle$, $\langle \frac{1}{3},\frac{1}{3} \rangle$	13	10	0.74
64	$\langle 1,1 \rangle$, $\langle 0,\frac{1}{3}\}, \{\frac{1}{3},1 \rangle$, $\langle \frac{1}{3},\frac{1}{3} \rangle$	20	16	0.49
8	$\langle 0,1 \rangle$, $\langle 1,1 \rangle$, $\langle \frac{1}{3},\frac{2}{3} \rangle$, $\langle \frac{1}{3},\frac{1}{3} \rangle$	20	17	0.37
51	$\langle 0,\frac{1}{5} \rangle$, $\rangle 0,\frac{3}{5} \rangle$, $\langle \frac{1}{5},1 \rangle$, $\langle \frac{3}{5},1 \rangle$	24	20	0.20
39	$\langle \frac{2}{3},1 \rangle$, $\langle \frac{1}{3},1 \rangle$, $\langle \frac{1}{3},\frac{2}{3} \rangle$, $\langle \frac{1}{3},\frac{1}{3} \rangle$	28	24	0.12

(5) のパターンは存在しない．

このようにして，86 種の R 集合を得，内 50 種の R 集合では 5 次則が構成できず，36 種の R 公式が構成できた．その中から，5 種の優良公式を選抜した (表 3)．

表 1，2，3 の優良公式の標本点配置をそれぞれ図 2，3，4 に示す．

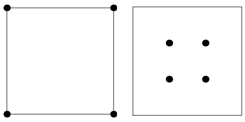

図 2　優良 1 次則の標本点配置

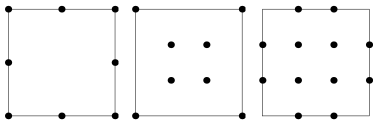

図 3　優良 3 次則の標本点配置

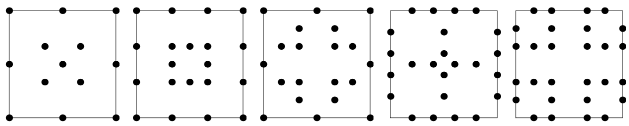

図 4　優良 5 次則の標本点配置

10　おわりに

本論文では，場合分けを使って R 集合を数え上げ，見落としがないようにした．そして，それらを標本点とする．FSR 公式を作成し，その中から優良な公式を選抜した．得られた優良公式は古田のものと変わらなかったが，その結果の信頼性を高めた．これからの課題は構成した公式を，実際に適応型積分則に組み込み，その適合性を調べる．また，さらに高次の優良公式を設計し，高精度の積分則を目指すことである．

参考文献

[1] 古田純也：長方形領域の再利用可能積分公式，南山大学数理情報学部数理科学科 2012 年度卒業論文 (2013).

[2] 伊藤加奈恵: 長方形領域における再利用可能型積分公式の設計，南山大学数理情報学部情報システム数理学科 2011 年度卒業論文 (2012).