

無重力状態における多関節物体の運動

宇宙猫の宙返り

2010SE089 加藤 さやか

指導教員：杉浦洋

1 はじめに

猫は手足を上にして背中から下に落とされても、空中でくると宙返りをし、足からしっかりと着地する習性を持つ。本研究では、この動きを剛体力学的に解析し、シミュレーションを行う。

2 三次元二節虫

剛体の簡単なモデルとして、図1, 2のような2つの直方体部品からなる1関節物体の運動シミュレーションを行う。剛体力学に基づき運動方程式を立て、4次の古典的ルンゲクッタ法 [1] で数値的に解いた。

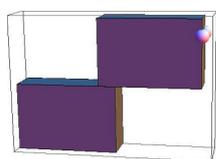


図1 三次元二節虫

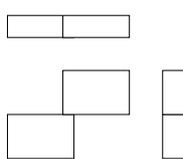


図2 二節虫の三面図

$\theta_1 = 4\pi$ のときの空間配置は同じであった。二節虫の空間配置は θ_1 の関数であり、その微係数 $\dot{\theta}_1$ とは無関係であることが予想される。これを仮説とし、今後の研究課題とする。

[仮説] 二節虫の空間配置は関節角度 θ_1 の周期関数であり、その周期は 4π である。//

この仮説によれば、二節虫では、真っ直ぐな姿勢で任意の方向を向かせることは出来ない。任意の方向を向かせるには、少なくとも三節虫である必要があると思われる。これも、今後の研究課題である。

3 猫の設計

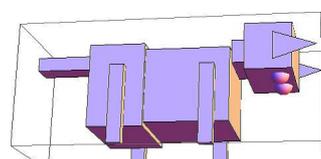


図7 モデル化した猫

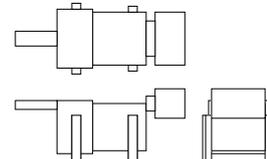


図8 猫の三面図

すると二節虫は図3から図6の順に動き、一回転をする。

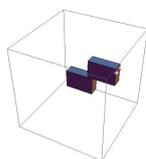


図3 二節虫の動き1

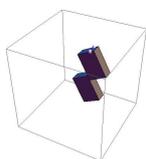


図4 二節虫の動き2

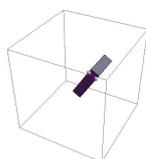


図5 二節虫の動き3

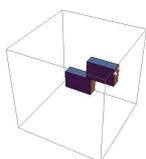


図6 二節虫の動き4

シミュレーションによれば、最初真っ直ぐだった二節虫は関節角 $t = 2\pi$ で真っ直ぐに戻るが、後斜め上を見る姿勢になっている。 $t = 4\pi$ で再び真っ直ぐになり、今度は設計配置に戻り、真っ直ぐ前を見る姿勢になる。

二節虫の空間配置は時刻 t について周期的で、その周期は 4π であることが、このシミュレーションで分かる。この例以外にも、様々に設計諸元を変えて実験したが、関節角 $\theta_1(t) = t$ のときは、上記の現象が観察された。 $\theta_1(t) = t + \sin t$ の関数で実験しても $t = 4\pi$ 、すなわち

9つの直方体部品からなるモデル猫(図7, 8)を考える。部品番号を、胸:0, 頭:1, 首:2, 右手:3, 左手:4, 腰:5, 右足:6, 左足:7, 尾:8とする。

3.1 関節物体の状態

関節で連結した部品0, 部品1, ..., 部品 n からなる関節物体 C を考える。本論文では部品0を基幹部品とする。部品0(基幹部品)に固定した局所座標の原点を \mathbf{r}_0 , 右手系正規直交系を $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とする。各関節の角度を θ_j とする。このとき、関節物体 C の空間的配置は、 $\mathbf{r}_0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \theta_j$ で完全に定まる。

3.2 変数表

部品 i ($0 \leq i \leq 8$) について、質量: m_i , 位置ベクトル(絶対座標): \mathbf{r}_i , 重心の速度ベクトル(絶対座標): \mathbf{v}_i , 角速度ベクトル(絶対座標): $\boldsymbol{\omega}_i$, 関節軸始点位置: \mathbf{p}_i , 関節軸ベクトル: \mathbf{a}_i , 重心の運動量: \mathbf{P}_i , 重心の角運動量: \mathbf{L}_1i , 重心まわりの角運動量: \mathbf{L}_2i , 重心まわりの慣性テンソル: \mathbf{I}_i .

それに加えて部品0については、局所座標 x 軸ベクトル: $\mathbf{i} = (i_x, i_y, i_z)$, 局所座標 y 軸ベクトル: $\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z)$ とすると、局所座標 z 軸ベクトル: $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$ である。

3.3 速度と運動量

単位ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ を軸とする角度 θ の右ねじ方向の回転を、以下の回転行列 $R_i = R(\mathbf{a}_i, \theta_i)$ で表す。

$$\begin{pmatrix} a_1^2 + (1 - a_1^2) \cos \theta & a_1 a_2 (1 - \cos \theta) - a_3 \sin \theta & a_3 a_1 (1 - \cos \theta) + a_2 \sin \theta \\ a_1 a_2 (1 - \cos \theta) + a_3 \sin \theta & a_2^2 + (1 - a_2^2) \cos \theta & a_2 a_3 (1 - \cos \theta) - a_1 \sin \theta \\ a_3 a_1 (1 - \cos \theta) - a_2 \sin \theta & a_2 a_3 (1 - \cos \theta) + a_1 \sin \theta & a_3^2 + (1 - a_3^2) \cos \theta \end{pmatrix}$$

回転行列 R_i の時間微分は、 $\dot{R}_i = \dot{\theta}_i R_\theta(\mathbf{a}_i, \theta_i)$ である。

部品 0 について、位置を $\mathbf{r}_0 = (x, y, z)$ 、重心の速度を $\mathbf{v}_0 = (v_x, v_y, v_z)$ 、角速度を $\boldsymbol{\omega}_0 = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ とすると、運動量 \mathbf{P}_0 は、 $\mathbf{P}_0 = m_0 \mathbf{v}_0$ となる。

部品 1 について、部品 1 は部品 2 と連結している。連結部の位置は $\mathbf{r}_{21} = R_1(\mathbf{g}_1 - \mathbf{p}_1) + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ である。また部品 2 がさらに部品 0 に連結しているため、連結部の位置は $\mathbf{r}_{01} = R_0(R_2 \mathbf{r}_{21} + \mathbf{p}_2 - \mathbf{g}_0)$ である。これより部品 1 の位置は $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{01} + \mathbf{r}_0$ となる。部品 1 の重心の速度は $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_{01} + R_0 \dot{R}_2 \mathbf{r}_{21} + R_2 \dot{R}_1(\mathbf{g}_1 - \mathbf{p}_1)$ となるため、部品 1 の運動量 \mathbf{P}_1 は、 $\mathbf{P}_1 = m_1 \mathbf{v}_1$ となる。部品 1 のように基幹部品 0 と他の部品 (部品 1) を介して連結している部品を孫部品と呼ぶ。

部品 2 について、部品 2 は部品 0 と連結している。連結部の位置は、 $\mathbf{r}_{02} = R_0(R_2(\mathbf{g}_2 - \mathbf{p}_2) + \mathbf{p}_2 - \mathbf{g}_0)$ である。これより部品 2 の位置は $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{02} + \mathbf{r}_0$ となる。部品 2 の重心の速度は、 $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}_{02} + R_0 \dot{R}_2(\mathbf{g}_2 - \mathbf{p}_2)$ となるため、部品 2 の運動量 \mathbf{P}_2 は、 $\mathbf{P}_2 = m_2 \mathbf{v}_2$ となる。部品 2 のように基幹部品 0 と直接連結する部品を子部品という。他の部品も同様にして求める。

3.4 角運動量

サイズ $2a \times 2b \times 2c$ の直方体部品の重心まわりの慣性テンソル I_i は、

$$I_i = \frac{m}{3} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

となり、これを用いて各部品の重心まわりの角運動量を求める。

部品 0 について、重心の角運動量は、 $\mathbf{L}_{10} = \mathbf{r}_0 \times m_0 \mathbf{v}_0$ 、重心まわりの角運動量は、 $\mathbf{L}_{20} = R_0 I_0 R_0^T \boldsymbol{\omega}_0$ となる。

部品 1 について、部品 1 の頭は部品 2 の首と連結している。重心の角運動量は、 $\mathbf{L}_{11} = \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{v}_1$ となる。重心まわりの角運動量は、慣性モーメント I_1 より、

$$\mathbf{L}_{21} = R_0 R_2 R_1 I_1 R_1^T R_2^T R_0^T \boldsymbol{\omega}_0 + R_0 R_2 R_1 I_1 R_1^T R_2^T (\dot{\theta}_2 \mathbf{a}_2) + R_0 R_2 I_1 (\dot{\theta}_1 \mathbf{a}_1).$$

部品 2 について、部品 2 の首は部品 0 の胸と連結している。重心の角運動量 \mathbf{L}_{12} は、 $\mathbf{L}_{12} = \mathbf{r}_2 \times m_2 \mathbf{v}_2$ となる。重心まわりの角運動量 \mathbf{L}_{22} は、慣性モーメント I_2 より、 $\mathbf{L}_{22} = R_0 R_2 I_2 R_2^T R_0^T \boldsymbol{\omega}_0 + R_0 I_2 (\dot{\theta}_2 \mathbf{a}_2)$ となる。他の部品も同様にして求める。

3.5 微分方程式

$\mathbf{r}_0(t)$, $\mathbf{i}(t)$, $\mathbf{j}(t)$ を未知関数とする微分方程式を示す。関節角度 $\theta_1(t)$, \dots , $\theta_8(t)$ は既知だから、 $\mathbf{r}_0(t)$, $\mathbf{i}(t)$, $\mathbf{j}(t)$ を求めれば、時刻 t における猫の空間配置が完全に決まる。3.3 節より猫の運動量は、 $\mathbf{P} = \sum_{i=0}^8 m_i \mathbf{v}_i$ である。3.4 節より角運動量は、 $\mathbf{L} = \sum_{i=0}^8 (\mathbf{L}_{1i} + \mathbf{L}_{2i})$ である。運動量保存則より、 $\mathbf{P} = 0$ —(1) となる。角運動量保存則より、 $\mathbf{L} = 0$ —(2) となる。これは $\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}_0$ に関する線形方程式となり、陽的に解ける。

数値計算で $\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}_0$ は線形方程式を数値的に解いて求める。以上により、猫の位置と姿勢を決定する独立変数 $\mathbf{r}_0, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ に関する、以下の微分方程式が得られる。

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0. \quad \text{—(3)}$$

$$\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{i}. \quad \text{—(4)}$$

$$\dot{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{j}. \quad \text{—(5)}$$

4 Mathematica による猫の宙返り実験

4 次の古典的ルンゲ・クッタ法 [1] で数値的に解く。数値実験によると、体を変形して慣性モーメントを変えることによって、回転を生じさせたり、回転速度を変えたりできることが分かった。基本姿勢から姿勢変形を経て基本姿勢に戻る周期的な運動を考える。1 周期後に体軸回りに何度回転したかを調べ、それが大きくなるように運動パラメータの調整を繰り返した。

その結果、体軸回りに約 35° 回転させることに成功した。これを 5 回繰り返して、ほぼ 180° の宙返りが行えた。

地上では 3 周期目で腕を横に伸ばして地面をとらえることができ、それを支点に着地可能であると思われる。

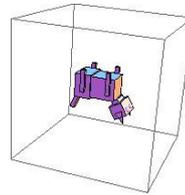


図 9 1 周期

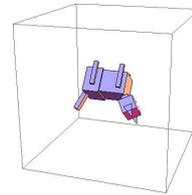


図 10 2 周期

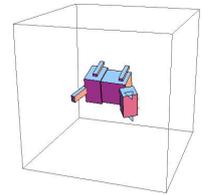


図 11 3 周期

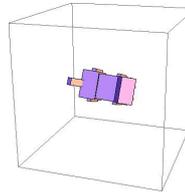


図 12 4 周期

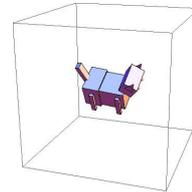


図 13 5 周期

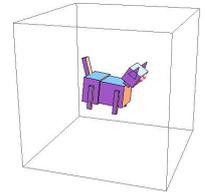


図 14 着地姿勢

5 おわりに

本研究では、関節物体の姿勢変換を剛体力学的に解析した。その結果、二節虫の数値実験では一動作一回転する姿勢があることが分かった。猫の場合、宇宙空間での一動作で一回転は難しく、同じ動作を繰り返すことで、二足着地の宙返りが成功した。そこで頭の振りを加えて姿勢を制御すると、四足で着地し宙返りが成功した。

今後の課題は、もっと自由に素早く向きを変えられる宇宙猫を設計することである。そのためには、モーメントを支配する胴体部の部品数を増やし自由度を上げる必要がある。また、二節虫の研究から、関節の位置も重要であると考えられる。

参考文献

- [1] 杉浦洋 : 『数値計算の基礎と応用—数値解析学への入門—』。サイエンス社, 1997.