正規多群モデルにおける対照群との分散の多重比較法

2010SE061 石部栞

指導教官:白石高章

1　はじめに

本論では 3 群以上の正規多群モデルで，分散の多重比較法について考察する．多重比較法にはさまざまなものがある．たとえば Bon-ferroni（ボンフェローニ）法，Holm（ホルム）法，Dunnett（ダネット）法，Tukey-Kramer（テューキークレーマー）法などがある．それらは白石 [1]，永田・吉田 [4] で紹介している．

２標本の分散の一様性の検定に F 分布が使われている．本研究ではモデルを k 群正規モデルに変え，正確な検定を行うため，ホルム法を用いて対照群との多重比較検定を述べ，同時信頼区間も調べる．F 統計量を使う理論は白石 [2] で考察されている．それらを参考にし，C 言語でプログラムを作成した．

2　1,2 標本モデルにおける統計的推測

２群のデータがともに正規分布からの無作為標本と仮定し，２群の違いはその分散で測られると考える．
確率変数 $X_1,\cdots,X_m$を正規分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ からの無作為標本，確率変数 $Y_1,\cdots,Y_n$を正規分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ からの無作為標本とする．このとき

$$S_3=\frac{\tilde{\sigma}_1^2}{\sigma_1^2}\Big/\frac{\tilde{\sigma}_2^2}{\sigma_2^2}\sim F_{n-1}^{m-1} \tag{1}$$

となる．ただし，$\tilde{\sigma}_1^2$，$\tilde{\sigma}_2^2$ は

$$\tilde{\sigma}_1^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2\ ,\tilde{\sigma}_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$$

とする．
ただし，F_{n-1}^{m-1} は自由度 $(m-1,n-1)$ の F 分布である．
これより $0<\alpha<1$ に対して

$$P\left(F_{n-1}^{m-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)<S_3<F_{n-1}^{m-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)=1-\alpha \tag{2}$$

となる．ただし $F_{n-1}^{m-1}(\beta)$ は F_{n-1}^{m-1} の上側 100β %点である．
検定では帰無仮説は H_0:$\sigma_1^2=\sigma_2^2$, 対立仮説は H_3:$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ であり, 帰無仮説 H_0 の下では確率変数 S_3 の σ_2^2/σ_1^2 が消え

$$S_4=\frac{\tilde{\sigma}_1^2}{\tilde{\sigma}_2^2}\sim F_{n-1}^{m-1}$$

となり，$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$のときは,

$$S_4=S_3\times\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$$

となる．

3　正規多群モデル

3.1　モデルの設定

第 1 群を対照群とする Dunnett 型多重比較検定を論じる．

表 1　: k 群正規モデル

水準	群	データ	分散	分布
対照	第 1 群	$X_{11},\cdots,X_{1n_1}$	σ_1^2	$N(\mu_1,\sigma_1^2)$
処理 1	第 2 群	$X_{21},\cdots,X_{2n_2}$	σ_2^2	$N(\mu_2,\sigma_2^2)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
処理 k-1	第 k 群	$X_{k1},\cdots,X_{kn_k}$	σ_k^2	$N(\mu_k,\sigma_k^2)$

総標本サイズ : $n\equiv n_1+n_2+\cdots+n_k$(すべての観測値の個数)
一様性の帰無仮説 H_0:$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\cdots=\sigma_k^2$

3.2　対立仮説の設定

第 1 群の対照群と第 k 群の処理群を比較することを考える．１つの比較のための検定は,

帰無仮説 H_i:$\sigma_i^2=\sigma_1^2$

に対して, 3 種の対立仮説,

① 両側対立仮説 $H_i^{A\pm}$:$\sigma_i^2\neq\sigma_1^2$
② 片側対立仮説 H_i^{A+}:$\sigma_i^2>\sigma_1^2$
③ 片側対立仮説 H_i^{A-}:$\sigma_i^2<\sigma_1^2$

となる．
帰無仮説のファミリーは,

$$\mathcal{H}_D\equiv\{H_2,\cdots,H_k\}=\{H_i|\ 2\leq i\leq k\}$$

である．T_i と $\tilde{\sigma}_i^2$ を,

$$T_i\equiv\frac{\tilde{\sigma}_i^2}{\tilde{\sigma}_1^2}\ ,\ \tilde{\sigma}_i^2=\frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_{i\cdot})^2$$

とする．

【ボンフェローニ法での検定方法】
初歩的な多重比較検定法としてボンフェローニ法がある．
ボンフェローニ法とは k 個の事象 $E_i(i=2,\cdots,k)$ に対して,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k}E_i\right)\leq\sum_{i=1}^{k}P(E_i) \tag{3}$$

に基づく多重比較法である．以下のように判定する．

①両側検定 : H_i vs. $H_i^{A\pm}$ $(i=2,\cdots,k)$
$T_i>F_{n_1-1}^{n_i-1}(\alpha/\{2(k-1)\})$ または $T_i<F_{n_1-1}^{n_i-1}(1-\alpha/\{2(k-1)\})$ ならば，帰無仮説 H_i を棄却し対立仮説 $H_i^{A\pm}$ を受け入れ，$\sigma_i\neq\sigma_1$ と判定する．
②片側検定 : H_i vs. H_i^{A+} $(i=2,\cdots,k)$
(制約 $\sigma_2,\cdots,\sigma_k\geq\sigma_1$ がつけられるとき),

$T_i > F^{n_i-1}_{n_1-1}(\alpha/(k-1))$ となる i に対して H_i を棄却し，対立仮説 H_i^{A+} を受け入れ $\sigma_i > \sigma_1$ と判定する．

③片側検定：H_i vs. H_i^{A-} $(i = 2, \cdots, k)$

(制約 $\sigma_2, \cdots, \sigma_k \leq \sigma_1$ がつけられるとき),

$T_i < F^{n_i-1}_{n_1-1}(1-\alpha/(k-1))$ となる i に対して H_i を棄却し，対立仮説 H_i^{A-} を受け入れ $\sigma_i < \sigma_1$ と判定する．

【ホルムの方法】

以下ではボンフェローニ法を改良している方法として，ホルムの方法を紹介する．

T_i の実現値を t_i とし，H_i に対する p 値 p_i を，

$$p_i \equiv \begin{cases} q_i & (①のとき) \\ P(F^{n_i-1}_{n_1-1} > t_i) & (②のとき) \\ P(F^{n_i-1}_{n_1-1} < t_i) & (③のとき) \end{cases} \tag{4}$$

とおく．

ただし $q_i \equiv 2\min\{P(F^{n_i-1}_{n_1-1} > t_i),\ P(F^{n_i-1}_{n_1-1} < t_i)\}$

(4) とホルム法をもとに手順 1∼ 手順 3 を行う方法は，水準 α の多重比較検定である．

以下では検定方法の手順 1〜手順 3 を説明する．

手順 1．推測の対象となるファミリーを

$$\mathcal{F} = \{H_2, \cdots, H_k\},\ H_i : \sigma_i^2 = \sigma_1^2\ (i = 2, \cdots, k)$$

手順 2．$k-1$ 個の p_i を小さい順に並べかえたものを

$p^*_{(1)} \leq p^*_{(2)} \leq, \cdots, \leq p^*_{(k-1)}$ とし，

対応する帰無仮説を $H^*_{(1)}, \cdots, H^*_{(k-1)} \in \mathcal{F}$ とする．

手順 3．ある i が存在して，

$j = 1, \cdots, i$ に対して $p^*_{(j)} \leq \alpha/\,(k-j)$

ならば，$H^*_{(i)}$ を棄却する．

4 C 言語によるホルム法の検定プログラム

前述で述べたホルム法を行うプログラムを C 言語を用いて作成した．パラメータの制約は 3 ≤k≤ 10，$2 \leq n_i \leq 100$，$0 < \alpha < 0.5$ とする．

4.1 メインプログラム

ページ数の都合上，main プログラムのみを示す．なお，全体のプログラムは卒業論文を参照せよ．

```
int main()
{
    Input();
    Keisan();
    Fmain();
    Holm();
}
```

以下ではその説明を行う．

1．Input() ; 群の個数，各群のサイズ，観測値，有意水準を入力し，対立仮説の種類を選択する．制約外の値が入力された場合にはエラーメッセージを表示し再度入力を行う．

2．Keisan() ; 各群の平均値，分散値，検定統計量を算出する．

3．Fmain() ; P($F^{n_i-1}_{n_1-1} > t_i$)，P($F^{n_i-1}_{n_1-1} < t_i$) の値を算出する．

4．Holm() ; ホルムの方法を実行する．

5 データ解析

5.1 データ内容

Excel を用いて正規乱数 (=NORMINV(RAND(), 平均値, 分散値)) を生成した．各群の平均値，分散値を以下のように設定した．各群のサイズを 5 とした．

第 1 群:平均値 5，分散値 1
第 2 群:平均値 10，分散値 2
第 3 群:平均値 10，分散値 3
第 4 群:平均値 15，分散値 5

表 2 は生成した正規乱数の値を表にまとめたものである．

表 2

第 1 群	第 2 群	第 3 群	第 4 群
4.86	9.34	8.38	11.11
4.62	9.51	11.51	18.77
4.56	11.86	12.26	15.60
5.57	11.05	6.43	27.32
4.81	7.62	9.19	21.19

5.2 データ解析結果

前述のプログラムを使って，群の個数を 4，各群のサイズを 5，観測値として表 2 の値，有意水準を 0.01 を入力し，対立仮説の種類は両側対立仮説を選択した．その結果，

対照群 (第 1 群) vs. 処理 2(第 3 群)
対照群 vs. 処理 3(第 4 群)

の場合に棄却され，有意差があることが分かった．

6 おわりに

本論では正規分布の分散について研究をおこない，正規多群モデルを設定し，対照群と処理群を比較する多重比較検定を論じてきた．ホルム法の検定方法を学び，C 言語を用いてホルム法のプログラムを作成し，データ解析を行った．今回は Excel を用いて正規乱数を生成し，データを作成したが，医療や地震などの解析を行えば有益な解析結果を得られるのではないかと感じた．

参考文献

[1] 白石高章 :『多群連続モデルにおける多重比較法』．共立出版社，東京，2011.

[2] 白石高章（2013）．多群指数モデルにおける平均パラメータの多重比較法 計量生物学 34 巻 1-20.

[3] 白旗慎吾 :『統計学』．ミネルヴァ書房，京都，2008.

[4] 永田靖・吉田道弘 :『統計的多重比較法の基礎』．サイエンティスト社，東京，1997.