自然演繹の証明図を作成する手順

2010SE052　市川貴之

指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は，[1] にしたがって，自然演繹の体系 NK の証明図を作成し，また，その作成の手順を説明することである．その説明は，NK の証明図における各推論規則に対応して行い，どの段階で何が行われているのかを明らかにする．卒業論文では１４の証明図を対象としたが，本稿ではそのうち４つの証明図を対象とする．２節では，自然演繹の体系 NK を小野 [1] を参考にして導入し，３節では，証明図を作成する手順の説明を行う．

2　自然演繹の定義

この節では，自然演繹の体系 NK を，小野 [1] を参考にして導入する．

述語論理の言語に次のものを使う．

1) 論理記号　$\wedge$，$\vee$，$\supset$，$\neg$
2) 量化記号　$\forall$，$\exists$
3) 対象変数　x，y，z，$\cdots$
4) 述語記号　P，Q，$\cdots$

述語論理の論理式の定義については，以下にしたがう．

定義 1

1) P が n 変数の述語記号，x_1，$\cdots$，x_n が対象変数であるならば，$P(x_1, \cdots, x_n)$ は論理式である．
2) A，B がともに論理式であるならば，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \supset B)$，$(\neg A)$ はいずれも論理式である．
3) A が論理式で，x が対象変数ならば，$(\forall x A)$，$(\exists x A)$ はともに論理式である．

体系 NK の推論規則は $\supset$，$\wedge$，$\vee$，$\forall$，$\exists$ についての導入と除去の規則および $(\bot)$，(RAA) からなる．それらの推論規則を以下に導ける．

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ B\end{array}}{A \supset B}\,(\supset I) \qquad \dfrac{A \quad A \supset B}{B}\,(\supset E) \qquad \dfrac{A \quad B}{A \wedge B}\,(\wedge I)$$

$$\dfrac{A \wedge B}{A}\,(\wedge E) \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}\,(\wedge E)$$

$$\dfrac{A_i}{A_1 \vee A_2}\,(\vee I)\ (i = 1{,}2) \qquad \dfrac{A \vee B \quad \begin{array}{c}[A]\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]\\ C\end{array}}{C}\,(\vee E)$$

$$\dfrac{\bot}{A}\,(\bot) \qquad \dfrac{A[z/x]}{\forall x A}\,(\forall I) \qquad \dfrac{\forall x A}{A[t/x]}\,(\forall E)$$

$$\dfrac{A[t/x]}{\exists x A}\,(\exists I) \qquad \dfrac{\exists x A \quad \begin{array}{c}[A[z/x]]\\ B\end{array}}{B}\,(\exists E) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \bot\end{array}}{A}\,(\mathrm{RAA})$$

ただし，$(\forall I)$ と $(\exists I)$ の t は任意の項である。また，$(\forall I)$ において z は $\forall x A$ および $A[z/x]$ に到る証明の (とり除かれていない) どの仮定にも自由変数としては現れないような対象変数とする．同じように $(\exists E)$ において z は，$\exists x A$，B および B に到る証明のうち $A[z/x]$ 以外の (とり除かれていない) どの仮定にも自由変数としては現れないような対象変数とする．$(\supset E)$，$(\wedge I)$，$(\wedge E)$，$(\vee I)$，$(\bot)$，$(\exists I)$，$(\forall E)$ が直前の論理式にのみ依存する局所的な推論規則であるのに対し，$(\supset I)$，$(\vee E)$，(RAA)，$(\forall I)$，$(\exists E)$ は証明全体に関係した大域的な推論規則であるという違いがある．

NK の証明図とはこれらの推論規則を繰り返し適用することにより得られる木の形をした図式である．証明図の一番下の論理式をこの結論という．

証明図の途中で使われた $(\supset I)$，$(\vee E)$，(RAA)，$(\forall I)$，$(\exists E)$ により，この証明図の仮定 (すなわち，証明図の一番うえにある論理式) はとり除いてよい．ここでどの推論規則の適用でとり除かれたのかを明らかにするために，その推論規則の適用が行われた場所ととり除かれた論理式に同じ番号をつけて区別することでわかりやすい証明図の作成ができる．$(\vee E)$ の場合には，上の二つの C のうちの左側の C を結論とする証明図に現れる仮定 A および右側の C を結論とする証明図に現れる仮定 B はとり除いてよい．

なお，(RAA) は背理法 (reductio ad absurdum) を表す．

3　証明図の作成とその手順

この節では，体系 NK の証明図の作成の手順について説明し，どの段階で何がおこなわれているかを明らかにする．以下に，４つの例を示す．各例は，証明図とその作成の手順の説明とで構成する．

(1)$(A \vee B) \vee C \supset (C \vee A) \vee B$

$$\Pi = \dfrac{[A \vee B]_2 \quad \dfrac{\dfrac{[A]_4}{C \vee A}\,(\vee I)}{(C \vee A) \vee B}\,(\vee I) \quad \dfrac{[B]_5}{(C \vee A) \vee B}\,(\vee I)}{(C \vee A) \vee B}\,(\vee E)_{4,5}$$

$$\dfrac{\dfrac{[(A \vee B) \vee C]_1 \quad \Pi \quad \dfrac{\dfrac{[C]_3}{C \vee A}\,(\vee I)}{(C \vee A) \vee B}\,(\vee I)}{(C \vee A) \vee B}\,(\vee E)_{2,3}}{(A \vee B) \vee C \supset (C \vee A) \vee B}\,(\supset I)_1$$

1) 一番外側の記号に注目し $(\supset I)$ を行う．すなわち，$(A \vee B) \vee C$ を仮定して $(C \vee A) \vee B$ を導くことを示す．
2) 仮定を先に使うことで仮定から結論に向けて証明図を作成できるので，仮定 $(A \vee B) \vee C$ の一番外側の記号に注目し，$(\vee E)$ を行う．すなわち，$A \vee B$ を仮定して $(C \vee A) \vee B$ を導くことと，C を仮定して $(C \vee A) \vee B$ を導くことを示す．
3) 2) の仮定 C に注目し，$(\vee I)$ を行い $C \vee A$ を導く．
4) $(\vee I)$ を行い，$C \vee A$ から $(C \vee A) \vee B$ を導く．
5) 2) の仮定 $A \vee B$ の一番外枠の記号に注目し，$(\vee E)$ を行う．すなわち，A を仮定して $(C \vee A) \vee B$ を導くこと

と，B を仮定して $(C \lor A) \lor B$ を導くことを示す．
6) 5) の仮定 A に注目し，$(\lor I)$ を行い $C \lor A$ を導く．
7) $(\lor I)$ を行い，$C \lor A$ から $(C \lor A) \lor B$ を導く．
8) 5) の仮定 B に注目し，$(\lor I)$ を行い $(C \lor A) \lor B$ を導く．
5′) 6),7) と 8) より，A から $(C \lor A) \lor B$ を導くことと，B から $(C \lor A) \lor B$ を導くことができた．ここで，5) の二つの仮定 A と B はおちる．
2′) 5)〜5′) と 3)〜4) より，$A \lor B$ から $(C \lor A) \lor B$ を導くことと，C から $(C \lor A) \lor B$ を導くことができた．ここで，2) の二つの仮定 $A \lor B$ と C はおちる．
1′) 2)〜2′) より，$(A \lor B) \lor C$ から $(C \lor A) \lor B$ を導くことができた．ここで，1) の仮定 $(A \lor B) \lor C$ がおちる．

(2)$((A \lor B) \supset C) \supset (A \supset C) \land (B \supset C)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_2}{A \lor B}\,(\lor I) \quad [A \lor B \supset C]_1}{C}}{A \supset C}\,(\supset I)_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]_3}{A \lor B}\,(\lor I) \quad [A \lor B \supset C]_1}{C}}{B \supset C}\,(\supset I)_3}{(A \supset C) \land (B \supset C)}\,(\land I)}{((A \lor B) \supset C) \supset (A \supset C) \land (B \supset C)}\,(\supset I)_1$$

ただし，$(\supset E)$ の記述は省略している．
1) 一番外側の記号に注目し $(\supset I)$ を行う．すなわち，$(A \lor B) \supset C$ を仮定して $(A \supset C) \land (B \supset C)$ を導くことを示す．
2) 仮定から情報が得られないので，$(A \supset C) \land (B \supset C)$ に注目し，$(\land I)$ を行い，$A \supset C$，$B \supset C$ をそれぞれ導けばよいとわかる．
3) $A \supset C$ に注目し，$(\supset I)$ を行う．すなわち，A を仮定して C を導くことを示す．
4) 3) の仮定 A に注目し，$(\lor I)$ を行い $A \lor B$ を導く．
5) $(\supset E)$ を行い，$A \lor B$ と 1) の仮定 $(A \lor B) \supset C$ から C を導く．
3′) 4),5) より，A から C を導くことができた．ここで，3) の仮定 A がおちる．
6) 3) と同様に $B \supset C$ に注目し，$(\supset I)$ を行う．すなわち，B を仮定して C を導くことを示す．
7) 4) の仮定 B に注目し，$(\lor I)$ を行い $A \lor B$ を導く．
8) $(\supset E)$ を行い，$A \lor B$ と 1) の仮定 $(A \lor B) \supset C$ から C を導く．
4′) 7),8) より，B から C を導くことができた．ここで，4) の仮定 B がおちる．
1′) 2)〜4′) より，$(A \lor B) \supset C$ から $(A \supset C) \land (B \supset C)$ を導くことができた．ここで，1) の仮定 $(A \lor B) \supset C$ がおちる．

(3)$\forall x(A \supset C) \supset (\exists x A \supset C)$[ただし C に x が自由変数としてあらわれないものとする．]

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x A]_2 \qquad \dfrac{[A[z/x]]_3 \quad \dfrac{[\forall x(A \supset C)]_1}{A[z/x] \supset C}\,(\forall E)}{C}\,(\supset E)}{C}\,(\exists E)_3}{\exists x A \supset C}\,(\supset I)_2}{\forall x(A \supset C) \supset (\exists x A \supset C)}\,(\supset I)_1$$

1) 一番外側の記号に注目し $(\supset I)$ を行う．すなわち，$\forall x(A \supset C)$ を仮定して $(\exists x A \supset C)$ を導くことを示す．
2) $\exists x A \supset C$ に注目し，1) と同様に，$\exists x A$ を仮定して C を導くことを示す．
3) 変数条件のある $(\exists E)$ を優先して用いると失敗が少ないので，2) の仮定 $\exists x A$ に注目し，$(\exists E)$ を行う．すなわち，任意に z を与え，さらに $A[z/x]$ を仮定して C を導くことを示す．
4) $\forall x(A \supset C)$ に注目し，$(\forall E)$ を行い $(A \supset C)[z/x]$ を導く．ここで，C の条件より $(A \supset C)[z/x] = A[z/x] \supset C$ だから，$A[z/x] \supset C$ を導く．
5) 3) の仮定 $A[z/x]$ と $A[z/x] \supset C$ に注目し，$(\supset E)$ を行い C を導く．
3′) 4),5) より，$A[z/x]$ から C を導くことができた．ここで，3) の仮定 $A[z/x]$ がおちる．
2′) 3)〜5) より，$\exists x A$ から C を導くことができた．ここで，2) の仮定 $\exists x A$ がおちる．
1′) 2)〜2′) より，$\forall x(A \supset C)$ から $(\exists x A \supset C)$ を導くことができた．ここで，1) の仮定 $\forall x(A \supset C)$ がおちる．

(4)$(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_3 \quad [A \supset B]_1}{B}\,(\supset E) \qquad [\neg B]_2}{\bot}\,(\neg E)}{\neg A}\,(\neg I)_3}{\neg B \supset \neg A}\,(\supset I)_2}{(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)}\,(\supset I)_1$$

1) 一番外側の記号に注目し $(\supset I)$ を行う．すなわち，$A \supset B$ を仮定して $\neg B \supset \neg A$ を導くことを示す．
2) 仮定から情報が得られないので，$\neg B \supset \neg A$ に注目し $(\supset I)$ を行う。すなわち，$\neg B$ を仮定して $\neg A$ が導かれることを示す．
3) 仮定から情報が得られないので，$(\neg I)$ を行う．すなわち，A を仮定して $\neg A$ を導くことを示す．
4) 3) の仮定 A と 1) の仮定 $A \supset B$ に注目し，$(\supset E)$ を行い B を導く．
5) $(\neg E)$ を行い，B と 2) の仮定 $\neg B$ から $\bot$ を導く．
3′) 4),5) より，A から $\neg A$ を導くことができた．ここで 3) の仮定 A がおちる．
2′) 3)〜3′) より，$\neg B$ から $\neg A$ を導くことができた．ここで，2) の仮定 $\neg B$ がおちる．
1′) 2)〜2′) より，$A \supset B$ から $\neg B \supset \neg A$ を導くことができた．ここで，1) の仮定 $A \supset B$ がおちる．

4　おわりに

本研究で自然演繹の証明図を説明する手順について取り組み，結果として，様々な証明の手順があるなかで的確な手順をみつけ利用していくことができるようになった．今回の研究ではシークエント計算との比較などを行うことができなかったが，自然演繹についての研究を進めるにつれ興味をもつことができた．

参考文献

[1] 小野寛晰 :『情報科学における論理』. 日本評論社, 東京,1994.