

円制限三体問題におけるハロー軌道への移行とその維持

2010SE046 廣村達哉 2010SE257 宇佐美元啓

指導教員：市川朗

1 はじめに

月と地球、もしくは、地球と太陽といった二天体と宇宙機による三体問題では、天体の質量に対して宇宙機の質量は無視出来るほど微小である。したがって宇宙機が天体の運動に与える影響も無視できるため、宇宙機は二天体による既存の重力場内を運動していると考えることができる。この重力場の力学的平衡点はラグランジュ点と呼ばれ L_1 から L_5 まで存在することが知られており、これらの点の周りをまわる周期軌道をハロー軌道と呼ぶ。ハロー軌道を利用した世界初の人工衛星は1978年に打ち上げられた探査衛星 International Sun-Earth Explorer-3 (ISEE-3) である。ISEE-3は太陽-地球系の L_1 点近傍で観測活動を行った [1]。ハロー軌道上の宇宙機には観測だけでなく第二天体の裏側との通信や深宇宙探査衛星の中継基地としての役割も期待されており、ISEE-3以後様々な宇宙機が打ち上げられている。しかし、ハロー軌道の方程式は解析的に周期解を求められないため、数値的に求めた初期値による周期解を用いて目標軌道を設計し、実際の運動のずれを補正しなければならない。本研究では、地球-月系における円制限三体問題の L_2 点ハロー軌道を用いる。この軌道は地球から見て月の裏側に位置する L_2 点を中心とする最大径約 70,000[km] の軌道であり、軌道上の宇宙機には、月の裏側の観測や L_2 点に配置した宇宙港と地球との通信などの役割が期待されている。 L_2 点に宇宙港のような起点を仮定しハロー軌道への移行制御を行う。収束後は維持制御を行う。これは精度の高い近似周期解を用いても自由運動では1周期目で 35[km] 程度、2周期目で 66,000[km] 程度のずれが生じるためである。制御は最適レギュレータ理論に基づくフィードバック制御により実現する。制御性能の評価は軌道収束の早さ（整定時間）と燃料消費に比例する速度変化の総和 ($L1$ ノルム) を用いる。また、維持制御中の宇宙機のスラスタがトラブルにより停止した場合を仮定し、目標軌道との誤差が規定内で飛行可能な停止日数の限界とトラブルによって増加したノルムを示すことで、スラスタ故障が宇宙機に与える影響を考察する。

2 軌道方程式

2.1 三体問題

三体問題において、地球と月の共通重心を中心として二天体が円運動するとき、円制限三体問題という。ここで、図1の通り、 M_e を地球の質量、 M を月の質量、 m を宇宙機の質量とする。質量比は $M_e : M = 81.3045 : 1$ とし、二天体の総質量に対する月の質量比率は $\rho = M/(M_e + M) = 0.01215$ とする。また、 O を慣性座標系 $O - \{I, J, K\}$ の原点とする。ここで、モデル化に用いた値を示す。 D_0 は地

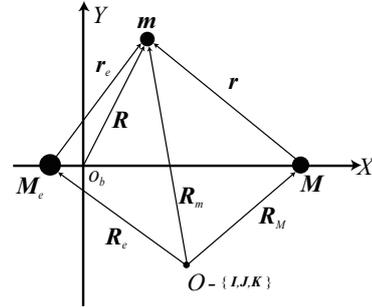


図1 三体問題

球と月の重心間距離であり G は万有引力定数である。

$$\begin{aligned}\mu &= G(M_e + M) = 403,488[\text{km}^3/\text{s}^2] \\ \mu_1 &= GM_e = 398,601[\text{km}^3/\text{s}^2] \\ \mu_2 &= GM = 4,887[\text{km}^3/\text{s}^2] \\ D_0 &= 384,748[\text{km}] \\ D_1 &= \rho D_0 = 4,674[\text{km}] \\ D_2 &= (1 - \rho)D_0 = 380,073[\text{km}] \\ n &= (\mu/D_0^3)^{1/2} = 2.661699 \times 10^{-6}[\text{rad/s}]\end{aligned}$$

地球の重心と回転座標系の原点 O_b との距離を D_1 、 O_b と月の重心との距離を D_2 、宇宙機の制御加速度を $\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T$ とすると、宇宙機の運動方程式は座標を用いることで、

$$\begin{aligned}\ddot{X} - 2n\dot{Y} - n^2X &= -\frac{GM_e}{r_e^3}(X + D_1) \\ &\quad - \frac{GM}{r^3}(X - D_2) + u_x \\ \ddot{Y} + 2n\dot{X} - n^2Y &= -\frac{GM_e}{r_e^3}Y - \frac{GM}{r^3}Y + u_y \\ \ddot{Z} &= -\frac{GM_e}{r_e^3}Z - \frac{GM}{r^3}Z + u_z\end{aligned}\tag{1}$$

となる。ここで $r_e = [(X + D_1)^2 + Y^2 + Z^2]^{1/2}$ 、および $r = [(X - D_2)^2 + Y^2 + Z^2]^{1/2}$ とした。次に、 $\tau = t/(1/n)$ 、 $\bar{X} = X/D_0$ 、 $\bar{Y} = Y/D_0$ 、 $\bar{Z} = Z/D_0$ とおき、(1) を無次元化すると、

$$\begin{aligned}\bar{X}'' - 2\bar{Y}' - \bar{X} &= -\frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}(\bar{X} + \rho) \\ &\quad - \frac{\rho}{\bar{r}^3}(\bar{X} - 1 + \rho) + \bar{u}_x \\ \bar{Y}'' + 2\bar{X}' - \bar{Y} &= -\frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}\bar{Y} - \frac{\rho}{\bar{r}^3}\bar{Y} + \bar{u}_y \\ \bar{Z}'' &= -\frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}\bar{Z} - \frac{\rho}{\bar{r}^3}\bar{Z} + \bar{u}_z\end{aligned}\tag{2}$$

となる。' は、 τ による一階微分を表す。ここで $\bar{r}_e = [(\bar{X} + \rho)^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2]^{1/2}$, $\bar{r} = [(\bar{X} - 1 + \rho)^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2]^{1/2}$, $\bar{u}_x = u_x/n^2 D_0$, $\bar{u}_y = u_y/n^2 D_0$, $\bar{u}_z = u_z/n^2 D_0$, $\bar{r}_e = r_e/D_0$, $\bar{r} = r/D_0$, である。(2) は、次の等式を満たすラグランジュ点と呼ばれる点をもつことが知られている [1]。

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}(\bar{X} + \rho) + \frac{\rho}{\bar{r}^3}(\bar{X} - 1 + \rho) \\ \bar{Y} &= \frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}\bar{Y} + \frac{\rho}{\bar{r}^3}\bar{Y} \\ \bar{Z} &= 0\end{aligned}$$

円制限三体問題において、ラグランジュ点は5つ存在する。そのうち、地球から見て月の裏側に位置するラグランジュ点 $L_2 = (l_2(\rho), 0, 0)$ において(2)を線形化すると、

$$\begin{aligned}\bar{X}'' - 2\bar{Y}' - (2\sigma + 1)\bar{X} &= \bar{u}_x \\ \bar{Y}'' + 2\bar{X}' + (\sigma - 1)\bar{Y} &= \bar{u}_y \\ \bar{Z}'' + \sigma\bar{Z} &= \bar{u}_z\end{aligned}\quad (3)$$

となる。ここで $\sigma = \rho/(l_2(\rho) - 1 + \rho)^3 + (1 - \rho)/(l_2(\rho) + \rho)^3$ である。

3 制御系設計

3.1 状態方程式の導出

$(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) = (x + l_2(\rho), y, z)$ とし、座標の原点を L_2 とする。線形化方程式(3)を $\mathbf{x} = [x \ y \ x' \ y' \ z \ z']^T$, $\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T$ を用いて、状態方程式で表すと

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}\quad (4)$$

となる。ここで行列 \mathbf{A} , \mathbf{B} は

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\sigma + 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sigma & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。また、非線形方程式(2)は

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

となる。ここで

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} l_2 - 2\sigma x - \frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}(x + l_2 + \rho) \\ -\frac{\rho}{\bar{r}^3}(x + l_2 - 1 + \rho) \\ \sigma y - \frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}y - \frac{\rho}{\bar{r}^3}y \\ \sigma z - \frac{1-\rho}{\bar{r}_e^3}z - \frac{\rho}{\bar{r}^3}z \end{bmatrix}$$

である。

3.2 誤差方程式

目標軌道の初期値と制御軌道の初期値をそれぞれ、 $\mathbf{x}_{f_0} = [x_{f_0} \ y_{f_0} \ x'_{f_0} \ y'_{f_0} \ z_{f_0} \ z'_{f_0}]^T$, $\mathbf{x}_0 = [x_0 \ y_0 \ x'_0 \ y'_0 \ z_0 \ z'_0]^T$ とすると、目標軌道と制御軌道の方程式はそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'_f &= \mathbf{A}\mathbf{x}_f + \mathbf{B}\mathbf{h}(\mathbf{x}_f), \mathbf{x}_f(0) = \mathbf{x}_{f_0} \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0\end{aligned}$$

となる。ここで軌道誤差 $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_f$ は、

$$\mathbf{e}' = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}(\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_f)) + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

を満たす。最適レギュレータの状態の重み行列を \mathbf{Q} , 入力
の重み行列を \mathbf{R} とし、リッカチ方程式

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{X} = 0$$

の解 \mathbf{X} を求める。求めた \mathbf{X} より、フィードバックゲイン $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{X}$ が得られる。制御入力を

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{e} - \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_f)$$

とおくと

$$\mathbf{e}' = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{e}$$

となり、軌道誤差を0に収束させることができる。

4 シミュレーションと性能評価

4.1 評価方法

ラグランジュ点 L_2 から、ハロー軌道へ移行させる制御、ハロー軌道に維持させる制御を行う。移行制御、維持制御それぞれにおける最適レギュレータの状態の重み行列、入力の重み行列を変化させながらシミュレーションを行うことにより、 $L1$ ノルムの変化を調べる。 $L1$ ノルムは加速度の絶対積分で表される。 $L1$ ノルムは、燃料消費と比例関係にあるため、これを最小化する q, r が最適な q_{opt}, r_{opt} である。移行制御においては、収束までの整定時間 ST も考慮した。本研究では微分方程式の数値解をルンゲクッタ法を用いて解き、そのときの刻み幅を 10^{-4} とした。

4.2 移行制御

ラグランジュ点 L_2 から、ハロー軌道へ移行させる制御を行う。移行に用いた状態の重み行列 \mathbf{Q}_{pre} , 入力の重み行列 \mathbf{R}_{pre} は、 $\mathbf{Q}_{pre} = \text{diag}[10 \ 10 \ q_{pre} \ q_{pre} \ 10 \ q_{pre}]$, $\mathbf{R}_{pre} = \text{diag}[10^{r_{pre}} \ 10^{r_{pre}} \ 10^{r_{pre}}]$ である。 \mathbf{Q}_{pre} の位置成分を10として、速度成分 q_{pre} を変化させ、 $L1$ ノルムを最小にする q_{preopt} を求めた。 q_{pre} の変化と各 q_{pre} における r_{pre} の変化、そのときの $L1$ ノルムの推移の3Dシミュレーションを図2に示す。ここで、 $ST = 2.1191$ であり、収束するまでの整定時間である。最適な値は、 $q_{preopt} = 2.000$, $r_{preopt} = -0.5000$ である。

$$L1 = \int_0^{ST} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2} dt \quad (5)$$

表 1 K による $L1$ ノルムの比較

	$K = K_I$	$K = K_{pre}$	$K = K_{halo}$
移行制御	0.2477	0.2284 (92.2%)	0.2371 (95.7%)
維持制御	1.6679×10^{-4}	1.5495×10^{-4} (92.9%)	1.5446×10^{-4} (92.6%)

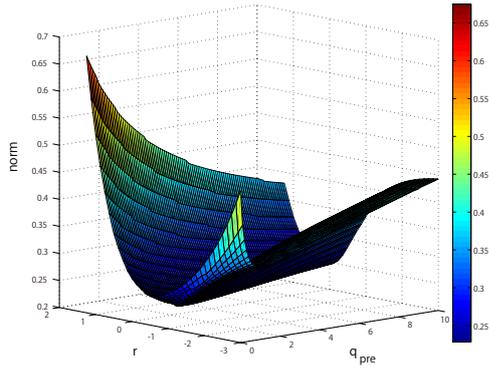


図 2 q_{pre}, r_{pre} の変化に対する $L1$ ノルムの推移

4.3 維持制御

ハロー軌道に維持させる制御を行う。維持に用いた状態の重み行列 Q_{halo} , 入力重み行列 R_{halo} は, $Q_{pre} = \text{diag}[10 \ 10 \ q_{halo} \ q_{halo} \ 10 \ q_{halo}]$, $R_{halo} = \text{diag}[10^{r_{halo}} \ 10^{r_{halo}} \ 10^{r_{halo}}]$ である。移行制御同様, Q_{halo} は, 位置成分を 10 として, 速度成分 q_{halo} を変化させ, $L1$ ノルムを最小にする $q_{halo_{opt}}$ を求めた。 q_{halo} の変化と各 q_{halo} における r_{halo} の変化, そのときの $L1$ ノルムの推移の 3D シミュレーションを図 3 に示す。最適な値は, $q_{halo_{opt}} = 0.800, r_{halo_{opt}} = -0.3750$ である。

$$L1 = \int_0^T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2} d\tau \quad (6)$$

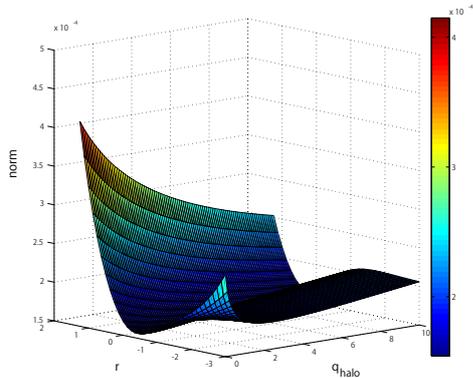


図 3 q_{halo}, r_{halo} の変化に対する $L1$ ノルムの推移

4.4 性能評価

状態に対する重み行列 Q に単位行列を用いたときのフィードバックゲイン K_I Q_{pre} を用いたときの K_{pre} , Q_{halo} を用いたときの K_{halo} のそれぞれの場合の移行制御の $L1$ ノルムと, 維持制御の $L1$ ノルムの 1 周期平均を表 1 に示す。また, K_I を用いたときの $L1$ ノルムを 100 として, K_{pre} と K_{halo} の $L1$ ノルムの比率を括弧内に示す。

5 維持可能条件

本章では, 目標軌道との軌道誤差 $\pm 10^{-4}$ (384.7480[km]) 以内で維持制御中の宇宙機のスラスタがトラブルにより停止した場合を仮定し, 軌道誤差 $\pm 10^{-3}$ (3847.48[km]) 以内で飛行可能な日数の限界を示す。また, スラスタの復旧に限界停止日数までかかった場合と, 正常な維持制御が行われた場合とのノルム変化を示す。スラスタは 3 軸方向に出力可能であり, それぞれが独立であるとする。また, 故障した軸以外はフィードバック制御が行われているものとする。

5.1 限界停止日数と増加ノルム

ハロー軌道上の宇宙機は, 周期的に速度が変化するため, スラスタ停止時のタイミングを考慮する必要がある。そこで, 図 4 のように, ハロー軌道の 1 周期 (約 14.8488 日) を 15 分割し, 1 日ずつ停止位置をずらしながら停止位置からの限界停止日数を求めた。

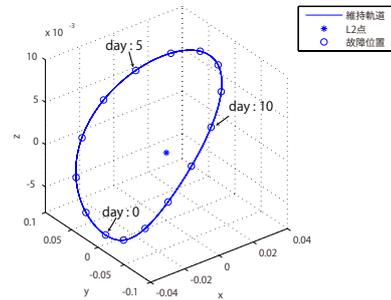


図 4 故障位置

シミュレーション結果を表 2 に示す。

表 2 故障日, 故障軸別の限界停止日数

	X軸	XY軸	XZ軸	XYZ軸	Y軸	YZ軸	Z軸
0日目	7	8	7	8	79	79	452
1日目	9	7	9	7	48	48	451
2日目	8	9	8	9	63	63	464
3日目	10	12	10	12	120	120	463
4日目	11	12	11	12	76	76	462
5日目	10	12	10	12	74	74	461
6日目	11	13	11	13	76	87	460
7日目	12	14	12	14	86	86	459
8日目	12	13	12	13	86	86	458
9日目	12	12	12	12	85	85	457
10日目	11	12	11	12	84	84	456
11日目	10	11	10	11	83	83	455
12日目	10	10	10	10	82	82	454
13日目	9	10	9	10	81	81	453
14日目	8	9	8	9	80	80	452

次に, 故障したスラスタが限界停止日に復旧し, その後正常な維持制御となるまでに必要となったノルムの増加分を表 3 に示す。

表 3 故障日, 故障軸別の増加ノルム

	X 軸	XY 軸	XZ 軸	XYZ 軸	Y 軸	YZ 軸	Z 軸
0 日目	0.006286	0.007101	0.006292	0.007124	0.022948	0.021873	0.010285
1 日目	0.009190	0.006286	0.009163	0.006285	0.021565	0.020757	0.009565
2 日目	0.009742	0.010432	0.009719	0.010499	0.020419	0.019542	0.010423
3 日目	0.009733	0.009569	0.009641	0.009730	0.026866	0.026705	0.010422
4 日目	0.010132	0.007745	0.010173	0.007823	0.020376	0.019617	0.010346
5 日目	0.008085	0.005829	0.008072	0.005862	0.019571	0.018812	0.010285
6 日目	0.007132	0.004554	0.007150	0.004530	0.020731	0.029017	0.010274
7 日目	0.005482	0.004910	0.005466	0.004886	0.024050	0.022942	0.010289
8 日目	0.005169	0.004333	0.005151	0.004319	0.023278	0.022184	0.010310
9 日目	0.006621	0.003907	0.006612	0.003896	0.022859	0.021785	0.010322
10 日目	0.005530	0.005972	0.005522	0.005974	0.023141	0.022055	0.010326
11 日目	0.004648	0.004826	0.004640	0.004829	0.023301	0.022208	0.010327
12 日目	0.007508	0.004198	0.007516	0.004200	0.023282	0.022190	0.010327
13 日目	0.007157	0.008328	0.007165	0.008357	0.023232	0.022142	0.010328
14 日目	0.007000	0.008095	0.007009	0.008124	0.023238	0.022147	0.010328

表 2, 表 3 より, X 軸 XY 軸 XZ 軸 XYZ 軸故障, Y 軸 YZ 軸故障の各故障日における限界停止日数および増加ノルムが非常に近い値であることが分かる. また, 停止日数の観点からは X 軸 Y 軸 Z 軸の順に故障の影響が大きく, ノルム増加の観点からは Y 軸 X 軸 Z 軸の順に故障の影響が大きいといえる.

5.2 軸別の故障影響評価

故障軸ごとの限界日数が最小の時の入力波形を示し, 故障の影響評価を行う. 前節の結果から X 軸 XY 軸 XZ 軸 XYZ 軸故障を X 軸故障関連群, Y 軸 YZ 軸故障を Y 軸故障関連群とし, 比較を行った. また, Z 軸故障の波形から Z 軸スラストの有用性を検討する. X 軸故障関連群の入力波形を図 5 から図 8 に示す.

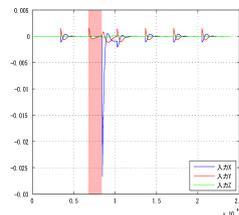


図 5 X 軸故障

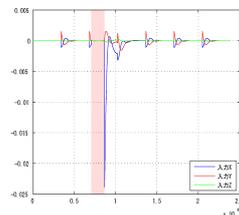


図 6 XY 軸故障

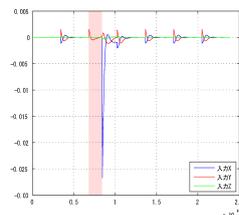


図 7 XZ 軸故障

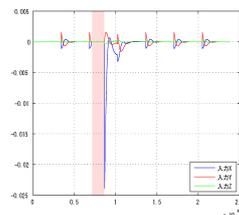


図 8 XYZ 軸故障

図 5 から図 8 より, X 軸故障関連群では Y 軸スラストや Z 軸スラストからの入力があっても, XYZ 軸の全てが故障した場合とほぼ同じ入力波形となることが分かる. これは, X 軸故障の影響力が大きく, YZ 軸のスラストで補完することができないためであると考えられる. したがって, X 軸故障関連群の限界停止日数および増加ノルムが近い値になると考えられる. 次に, Y 軸故障関連群の入力波形を図 9, 図 10 に示す.

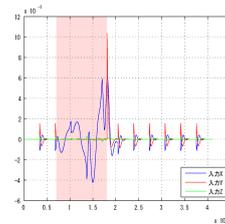


図 9 Y 軸故障

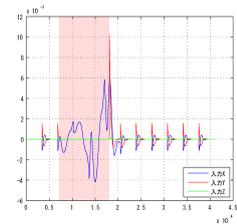


図 10 YZ 軸故障

図 9, 図 10 より, Y 軸故障と YZ 軸故障の波形に大きな違いが見られないことから Z 軸入力の影響は最も小さいことがわかる. また, Y 軸故障関連群では Y 軸故障の影響を X 軸入力が補う形になっているため, 限界停止日数は X 軸故障関連群より長くなるものの, 増加ノルムは最も大きくなるのがわかる. 最後に, Z 軸故障の入力波形を図 11 に示す.

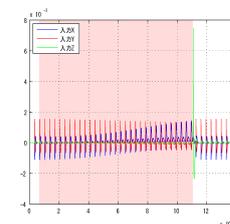


図 11 Z 軸故障

図 11 より, Z 軸スラスト故障の影響は軽微であるといえる. よって, X 軸スラストと Y 軸スラストのみで維持制御を行っても X 軸故障関連群の数 10 倍の維持日数となる. ノルムの増加も Y 軸故障関連群の 1/2 程度である. また, Z 軸スラストが復旧した時の入力の最大値は X 軸故障関連群や Y 軸故障関連群の入力の最大値より小さい. よって, Z 軸入力は毎周期入力する必要はなく, スラストも出力の小さいものでよい.

6 おわりに

地球-月系の円制限三体問題における L_2 点近傍のハロー軌道上を運動する宇宙機の制御系設計を行った. 最適レギュレータの状態の重み行列, 入力の重み行列を変化させながらシミュレーションを行うことにより, ハロー軌道への移行制御と維持制御にかかる L_1 ノルムを最小化するフィードバックゲイン K_{pre}, K_{halo} を示した. さらに, 維持制御中のスラスト故障を仮定し, 故障軸スラストの限界停止日数および故障の影響によるノルムの増加分を求めた. その結果から, スラストの故障影響評価を故障軸別に行った.

参考文献

- [1] M. Utashima., "Orbital Mechanics Near Lagrange's Points", 1997
- [2] A. Ichikawa., M. Bando., "PERIODIC ORBITS AND FORMATION FLYING NEAR THE LIBRATION POINTS", 2012.