

エネルギー制御による Pendubot の振り上げと安定化

—同定実験による現実的なシミュレーションモデルの構成—

2010SE041 林雅大, 2010SE042 日比野正嗣, 2010SE090 加藤任真

指導教員：陳 幹

1 はじめに

Pendubot とは Pendulum と Robot の合成語であり、モータに繋がれたリンク 1 と、そのリンク 1 の先に駆動機を持たない関節により繋がれたリンク 2 からなる 1 入力 2 出力系の倒立振子の一種である。本研究の目的は、この不安定かつ非線形な特性を持つ Pendubot を、重力の影響のみを受けている状態 (down resting position と呼ぶ) から振り上げ、両リンクが水平面に対し垂直に倒立している状態 (top position と呼ぶ) にて安定化させることである。

2 モデリング

2.1 制御対象と物理パラメータ

図 1 に Pendubot の構造を示す。また、モデリングに用いる各物理パラメータは右の表 1 の通りである。

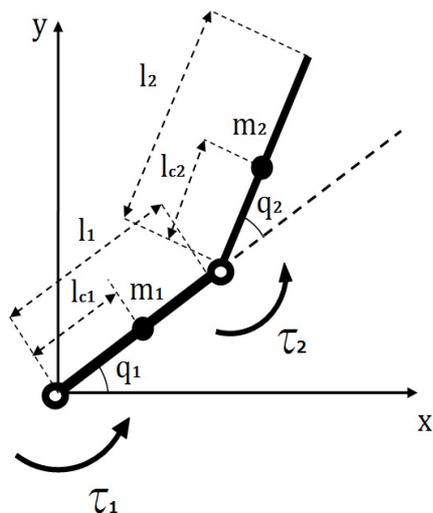


図 1 Pendubot の略図

なお、 K_{t2} 、 C_1 、 C_2 については、現実的なモデルの構成のために独自に定義したものであり、仕様書では与えられていないため、適切な同定実験を行うことでその値を得た。(詳細な実験内容についてはここでは省くが、理論的な導出方針を簡単に記しておく。)

劣化したモータのトルク定数 K_{t2} については、モータに一定の入力電圧を与え続け、重力と釣り合って静止した位置から、実際にモータから出力されているトルクを推定し、それを基に導出した。一方、各関節の摩擦係数 C_1 、 C_2 については、外力が与えられていない状態での実験機の運動を観察し、その際のエネルギー減少率を基にそれぞれの値を導出した。

表 1 物理パラメータ

重力加速度	$g(=9.81)$	[m/s ²]
リンク 1 全体の質量	m_1	[kg]
リンク 2 全体の質量	m_2	[kg]
リンク 1 の長さ	l_1	[m]
リンク 2 の長さ	l_2	[m]
リンク 1 の支点から重心までの長さ	l_{c1}	[m]
リンク 2 の支点から重心までの長さ	l_{c2}	[m]
リンク 1 の角度 (一般化座標 1)	q_1	[rad]
リンク 2 の角度 (一般化座標 2)	q_2	[rad]
リンク 1 に加わるトルク (一般化力 1)	τ_1	[Nm]
リンク 2 に加わるトルク (一般化力 2)	τ_2	[Nm]
リンク 1 の慣性モーメント	I_1	[kg·m ²]
リンク 2 の慣性モーメント	I_2	[kg·m ²]
仕様書に記されていたモータのトルク定数	K_t (=0.0049431)	[Nm/V]
劣化した現在のモータのトルク定数	K_{t2} (=0.0041695)	[Nm/V]
モータ・リンク 1 間の摩擦係数	C_1 (=0.0002657)	
リンク 1・リンク 2 間の摩擦係数	C_2 (=0.00003896)	

2.2 ラグランジュの運動方程式

まずは [4] を参考に、ラグランジュの方法を用いて、制御対象の振舞を表現する数学モデルを導出する。リンク 1、リンク 2 の重心の位置をそれぞれ (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) とおくと、それらは次の式 (1)~(4) のように表せる。

$$x_1 = l_{c1} \cos q_1 \quad (1)$$

$$y_1 = l_{c1} \sin q_1 \quad (2)$$

$$x_2 = l_1 \cos q_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \quad (3)$$

$$y_2 = l_1 \sin q_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \quad (4)$$

この (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) を用いて、Pendubot 全体の運動エネルギー T 、ポテンシャル U 、摩擦による損失エネルギー

ギー D をそれぞれ求めると式 (5)~(7) のようになる。

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \quad (5)$$

$$U = m_1gy_1 + m_2gy_2 \quad (6)$$

$$D = \frac{1}{2}C_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}C_2\dot{q}_2^2 \quad (7)$$

2つの一般化座標 q_1, q_2 についてのラグランジュの運動方程式は以下の式 (8), (9) のように与えられる。

$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} \quad (8)$$

$$\tau_2 = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial U}{\partial q_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} \quad (9)$$

ここで、モータへの入力電圧を v_{in} とおくと、 τ_1 は同定実験で得た、劣化したモータのトルク定数 K_{t2} を用いて、 $K_{t2} \times v_{in}$ と表せる。以上を踏まえた上で、式 (5)~(7) を用いて式 (8) を計算すると次の式 (10) のようになる。

$$K_{t2}v_{in} = \{m_1l_{c1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c2}^2) + 2m_2l_1l_{c2} \cos q_2 + I_1 + I_2\}\dot{q}_1 + (m_2l_{c2}^2 + m_2l_1l_{c2} \cos q_2 + I_2)\ddot{q}_2 - 2m_2l_1l_{c2}\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin q_2 - m_2l_1l_{c2}\dot{q}_2^2 \sin q_2 + m_1gl_{c1} \cos q_1 + m_2gl_1 \cos q_1 + m_2gl_{c2} \cos(q_1 + q_2) + C_1\dot{q}_1 \quad (10)$$

また、リンク 2 には駆動機が接続されていないため常に $\tau_2=0$ である。これを考慮した上で、式 (5)~(7) を用いて式 (9) を計算すると次の式 (11) のようになる。

$$0 = (m_2l_{c2}^2 + m_2l_1l_{c2} \cos q_2 + I_2)\ddot{q}_1 + (m_2l_{c2}^2 + I_2)\ddot{q}_2 + m_2l_1l_{c2}\dot{q}_1^2 \sin q_2 + m_2gl_{c2} \cos(q_1 + q_2) + C_2\dot{q}_2 \quad (11)$$

ここで、以降の記述を簡単にするため、数式の整理用に5つのパラメータ $J_1 \sim J_3$ および N_1, N_2 を表 2 のようにおく。(なお、これらの値は実験機に付属していた、MATLAB の m ファイル「id_pendubot」内で数値的に与えられている。)

表 2 数式整理用パラメータ

$J_1 = m_1l_{c1}^2 + m_2l_1^2 + I_1$	[kg·m ²]
$J_2 = m_2l_{c2}^2 + I_2$	[kg·m ²]
$J_3 = m_2l_1l_{c2}$	[kg·m ²]
$N_1 = m_1l_{c1} + m_2l_1$	[kg·m]
$N_2 = m_2l_{c2}$	[kg·m]

これらの5つの定数パラメータを用いて式 (10), (11) を単純化するとそれぞれ次の式 (12), (13) のようになる。

$$v_{in} = \frac{1}{K_{t2}} \{ (J_1 + J_2 + 2J_3 \cos q_2)\ddot{q}_1 + (J_2 + J_3 \cos q_2)\ddot{q}_2 - (J_3\dot{q}_2 \sin q_2 + C_1)\dot{q}_1 - (J_3\dot{q}_1 \sin q_2 + J_3\dot{q}_2 \sin q_2)\dot{q}_2 + (N_1g \cos q_1 + N_2g \cos(q_1 + q_2)) \} \quad (12)$$

$$0 = (J_2 + J_3 \cos q_2)\ddot{q}_1 + J_2\ddot{q}_2 + (J_3\dot{q}_1 \sin q_2)\dot{q}_1 + C_2\dot{q}_2 + N_2g \cos(q_1 + q_2) \quad (13)$$

以上で得られた式 (12), (13) を、行列表現を利用して

$$d(q, \dot{q}) \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + e(q, \dot{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + f(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} v_{in} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

という形にまとめた結果、行列 $d(q, \dot{q})$, $e(q, \dot{q})$, $f(q, \dot{q})$ は以下の式 (15)~(35) のようになった。

$$d = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_{t2}}(J_1 + J_2 + 2J_3 \cos q_2) & \frac{1}{K_{t2}}(J_2 + J_3 \cos q_2) \\ J_2 + J_3 \cos q_2 & J_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$e = \begin{bmatrix} -\frac{1}{K_{t2}}(J_3\dot{q}_2 \sin q_2 - C_1) & -\frac{1}{K_{t2}}(J_3\dot{q}_1 \sin q_2 + J_3\dot{q}_2 \sin q_2) \\ J_3\dot{q}_1 \sin q_2 & C_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$f = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_{t2}}(N_1g \cos q_1 + N_2g \cos(q_1 + q_2)) \\ N_2g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (17)$$

2.3 状態方程式

次に、以上で得られた d, e, f を用いて、Pendubot の状態方程式を求める。まずは式 (14) を変形することで以下の式 (18) を得る。

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = d^{-1} \begin{bmatrix} v_{in} \\ 0 \end{bmatrix} - d^{-1}e \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} - d^{-1}f \quad (18)$$

式 (15)~(35) を利用して実際にこの式の計算を行うことで、Pendubot の状態方程式 (19) を得る。

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{J_1J_2 - J_3^2 \cos^2 q_2} \cdot h(q, \dot{q}) \quad (19)$$

$$h(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} J_2K_{t2}v_{in} + J_2J_3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \sin q_2 + J_3^2\dot{q}_1^2 \sin q_2 \cos q_2 - J_2N_1g \cos q_1 + J_3N_2g \cos(q_1 + q_2) \cos q_2 - J_2\dot{q}_1C_1 + (J_2 + J_3 \cos q_2)\dot{q}_2C_2 \\ -(J_2 + J_3 \cos q_2)K_{t2}v_{in} - J_2J_3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \sin q_2 - J_3^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \sin q_2 \cos q_2 - (J_1 + J_3 \cos q_2)\dot{q}_1^2 J_3 \sin q_2 + J_2N_1g \cos q_1 + J_3N_1g \cos q_1 \cos q_2 - J_1N_2g \cos(q_1 + q_2) - J_3N_2g \cos(q_1 + q_2) \cos q_2 + (J_2 + J_3 \cos q_2)\dot{q}_1C_1 - (J_1 + J_2 + 2J_3 \cos q_2)\dot{q}_2C_2 \end{bmatrix}$$

3 制御系設計

3.1 振り上げコントローラ的设计

まずは, Pendubot を down resting position から top position 近傍まで振り上げるための「振り上げコントローラ」の設計から行う. ここでの Pendubot の振舞いは線形化することができないため, [2] を参考にし, モデルは非線形のまま, エネルギー保存則に基づいて, 非線形なコントローラを設計する.

モデリングで求めた T, U を用いて, Pendubot 全体のエネルギー $E(q, \dot{q})$ は, 次の式 (20) のように表せる.

$$E(q, \dot{q}) = T + U \quad (20)$$

実際に式 (5), (6) を代入し, さらに表 2 より数式整理用パラメータを用いて整理し, 次の式 (21) を得る.

$$E = \frac{1}{2}(J_1 + J_2 + 2J_3 \cos q_2)\dot{q}_1^2 + (J_2 + J_3 \cos q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}J_2\dot{q}_2^2 + N_1g \sin q_1 + N_2g \sin(q_1 + q_2) \quad (21)$$

これの時間微分をとると次の式 (22) のようになる.

$$\begin{aligned} \dot{E} = & -J_3\dot{q}_1^2\dot{q}_2 \sin q_2 + (J_1 + J_2 + 2J_3 \cos q_2)\dot{q}_1\dot{q}_1 \\ & -J_3\dot{q}_1\dot{q}_2^2 \sin q_2 + (J_2 + J_3 \cos q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ & + (J_2 + J_3 \cos q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + J_2\dot{q}_2\dot{q}_2 \\ & + N_1g\dot{q}_1 \cos q_1 + N_2g \cos(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{aligned} \quad (22)$$

ここで, モデリングで得た式 (12) の両辺に \dot{q}_1 をかけることで以下の式 (23) を得る.

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 K_{t2} v_{in} = & (J_1 + J_2 + 2J_3 \cos q_2)\dot{q}_1\dot{q}_1 \\ & + (J_2 + J_3 \cos q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ & - 2J_3\dot{q}_1^2\dot{q}_2 \sin q_2 - J_3\dot{q}_1\dot{q}_2^2 \sin q_2 \\ & + N_1g\dot{q}_1 \cos q_1 + N_2g\dot{q}_1 \cos(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (23)$$

さらに, モデリングで得た式 (13) の両辺に \dot{q}_2 をかけることで以下の式 (24) を得る.

$$0 = (J_2 + J_3 \cos q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + J_2\dot{q}_2\dot{q}_2 + J_3\dot{q}_1^2\dot{q}_2 \sin q_2 + N_2g\dot{q}_2 \cos(q_1 + q_2) \quad (24)$$

以上で得られた式 (23) と式 (24) の和をとると

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 K_{t2} v_{in} = & (J_1 + J_2 + 2J_3 \cos q_2)\dot{q}_1\dot{q}_1 \\ & + (J_2 + J_3 \cos q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ & - J_3\dot{q}_1^2\dot{q}_2 \sin q_2 - J_3\dot{q}_1\dot{q}_2^2 \sin q_2 \\ & + N_1g\dot{q}_1 \cos q_1 + N_2g\dot{q}_1 \cos(q_1 + q_2) \\ & + (J_2 + J_3 \cos q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + J_2\dot{q}_2\dot{q}_2 \\ & + N_2g\dot{q}_2 \cos(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (25)$$

となる. 右辺に注目すると, 式 (22) の右辺と一致することが分かる. したがって, 次の関係式が成り立つ.

$$\dot{E} = \dot{q}_1 K_{t2} v_{in} \quad (26)$$

[2] に倣い, リアプノフ関数を, 任意の正の定数 K_E, K_D, K_P を用いて次のように定める.

$$V = \frac{K_E}{2}\tilde{E}^2 + \frac{K_D}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{K_P}{2}\tilde{q}_1^2 \quad (27)$$

$$\begin{cases} \tilde{E} = E - (N_1 + N_2)g \\ \tilde{q}_1 = q_1 - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

なお, \tilde{E} はその時刻における E と目標地点における E との差, \tilde{q}_1 はその時刻における q_1 と目標地点における q_1 との差であるが, 今回目標地点は top position : $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = (\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ であるため上記のようになる. 続いて, 式 (27) の時間微分をとると次のようになる.

$$\dot{V} = K_E\tilde{E}\dot{\tilde{E}} + K_D\dot{q}_1\ddot{q}_1 + K_P\tilde{q}_1\dot{q}_1 \quad (28)$$

これに式 (26) を代入し, 計算すると

$$\dot{V} = \dot{q}_1(K_E\tilde{E}K_{t2}v_{in} + K_D\ddot{q}_1 + K_P\dot{q}_1) \quad (29)$$

となる. この式 (29) より,

$(K_E\tilde{E}K_{t2}v_{in} + K_D\ddot{q}_1 + K_P\dot{q}_1) = -\dot{q}_1$ となるように入力電圧 v_{in} を決めてやれば $\dot{V} = -\dot{q}_1^2$ となり, V が単調減少関数になることが分かる. 実際に関係式からこのような v_{in} を求めると次のようになる.

$$v_{in} = \frac{-\dot{q}_1 - K_D\ddot{q}_1 - K_P\dot{q}_1}{K_E\tilde{E}K_{t2}} \quad (30)$$

ここで, 以降の記述を簡単にするため, $z(q, \dot{q})$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} z(q, \dot{q}) = & J_2J_3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \sin q_2 + J_3^2\dot{q}_1^2 \sin q_2 \cos q_2 \\ & - J_2N_1g \cos q_1 + J_3N_2g \cos(q_1 + q_2) \cos q_2 \\ & - J_2\dot{q}_1C_1 + (J_2 + J_3 \cos q_2)\dot{q}_2C_2 \end{aligned} \quad (31)$$

モデリングで求めた状態方程式 (19) の一行目より,

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{J_1J_2 - J_3^2 \cos^2 q_2}(z(q, \dot{q}) + J_2K_{t2}v_{in}) \quad (32)$$

である. これを式 (30) に代入し, 数式を整理することで, Pendubot を top position へと振り上げるための制御入力 (振り上げコントローラ) を次のように得る.

$$v_{in} = \frac{-K_Dz(q, \dot{q}) - (J_1J_2 - J_3^2 \cos^2 q_2)(\dot{q}_1 + K_P\dot{q}_1)}{\{(J_1J_2 - J_3^2 \cos^2 q_2)K_E\tilde{E} + K_DJ_2\}K_{t2}} \quad (33)$$

3.2 安定化コントローラ的设计

続いて, 振りあがった Pendubot を top position で安定化するための「安定化コントローラ」の設計を行う. top position 近傍での振舞いは線形化が可能であるため, まずはモデリングで求めた非線形な状態方程式 (19) を線形化し, 状態空間表現を得る.

平衡点 (x_r, u_r) 近傍でのテイラー展開による近似式は次ページの式 (34) のように与えられる. ([3] 参照)

$$f(x, u) = f(x_r, u_r) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_r, u_r} \cdot (x - x_r) + \frac{\partial f}{\partial u}|_{x_r, u_r} \cdot (u - u_r) \quad (34)$$

$x = [q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2]^T$ とし、この式 (34) を用いて top position 近傍での \dot{x} のテイラー展開による近似を行う (具体的には、式 (34) において $f(x, u)$, (x_r, u_r) をそれぞれ式 (35), (36) のようにおく) と式 (37) のようになる。

$$f(x, u) = \dot{x} \quad (35)$$

$$x_r = \left[\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0 \right]^T, \quad u_r = v_{intop} = 0 \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} \Big|_{x_r, u_r} \\ & + \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_3} & \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} \Big|_{x_r, u_r} \begin{bmatrix} x_1 - x_{r1} \\ x_2 - x_{r2} \\ x_3 - x_{r3} \\ x_4 - x_{r4} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial u} \\ \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \dot{x}_4}{\partial u} \end{bmatrix} \Big|_{x_r, u_r} \cdot (u - u_r) \end{aligned} \quad (37)$$

式 (37) の各行列の各要素を全て計算することで、状態空間表現 (38) を得る。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (38)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$a_{21} = \frac{1}{J_1 J_2 - J_3^2} (J_2 N_1 g - J_3 N_2 g)$$

$$a_{23} = \frac{1}{J_1 J_2 - J_3^2} (-J_3 N_2 g)$$

$$a_{41} = \frac{1}{J_1 J_2 - J_3^2} (-J_2 N_1 g - J_3 N_1 g + J_1 N_2 g + J_3 N_2 g)$$

$$a_{43} = \frac{1}{J_1 J_2 - J_3^2} (J_1 N_2 g + J_3 N_2 g)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$b_1 = \frac{J_2 K_{t2}}{J_1 J_2 - J_3^2}$$

$$b_4 = \frac{-K_{t2}(J_2 + J_3)}{J_1 J_2 - J_3^2}$$

$$x = \begin{bmatrix} q_1 - \frac{\pi}{2} \\ \dot{q}_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad u = v_{in} \quad (41)$$

以上で得られた状態空間表現を用いて、最適レギュレータ理論によるコントローラ設計を行う。

$u(t) = -Kx(t)$ としたとき評価関数

$$J = \int_0^{\infty} \{x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)\} dt \quad (42)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 10 \quad (43)$$

を最小にするゲイン K を MATLAB 上で `lqr` コマンドを利用して求めることで、Pendubot を top position で安定化するためのフィードバックゲイン (安定化コントローラ) を次のように得る。

$$K = [159.1196 \quad 26.6935 \quad 155.0244 \quad 20.2493] \quad (44)$$

3.3 切り替えタイミングの考察

実際に振り上げから安定化までを行う際は、3.1 節で設計した振り上げコントローラにより top position 近傍まで振り上げた後、3.2 節で設計した安定化コントローラに切り替えることで安定化するという流れで制御を行うことになる。この切り替えタイミングの取り方も、制御性能に大きく影響するはずである。

では、実際にどのようなタイミングで切り替えを行えば良いのかといえば、安定化コントローラが確実に機能するような状態で切り替えを行うことが望ましいと言える。

安定化コントローラは最適レギュレータ理論を用いて設計した。このコントローラは平衡点近傍にある制御対象を、設計の際に設定した各状態変数に対する重み定数に準じて、各状態変数を平衡点へと収束させる働きをする。

つまり、目標の平衡点を中心とした状態空間において、中心からのズレがこの範囲内の点からであれば中心への収束を保証できる、という「安定化コントローラの守備範囲」が状態空間上に存在し、その形は綺麗な球状ではなく、各重み定数の比率に応じた形の楕円体であると考えられる。

では、その「安定化コントローラの守備範囲」を数値的に捉え、シミュレーションおよび実験で簡単に観測できるような方法を考察する。

安定化コントローラの設計に用いた評価関数 J (式 (42)) は、各状態変数とそれに応じた重み定数を内包しており、

この件に利用できそうである。しかしこの J は積分項を含むため、実用的でない。そこで、 J 内部の被積分要素を以下のように J_{int} とおき、これを利用することにした。

$$J_{int} = x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \quad (45)$$

シミュレーションおよび実験の際は、この J_{int} が特定の値より小さくなった時にコントローラを切り替えるという構造のスイッチを使用することとする。

実験機に付属していたサンプルプログラムは位置のみを評価基準にしており、 q_1 が $\frac{\pi}{2} \pm 0.2[\text{rad}]$ 、かつ、 q_2 が $\pm 0.3[\text{rad}]$ となった時に、制御則を切り替えるというスイッチを使用しているが、それに対し、今回我々が考案したスイッチは、 J_{int} という変数1つの値を評価するだけで、位置、速度、どちらも合わせて総合的にケアできる。

4 シミュレーション

2.3 節で求めた Pendubot の状態方程式 (19) を用いて、Simulink 上に対象のシステムを表すブロック線図を作成し、非線形シミュレーションにて、振り上げから安定化までの切り替え制御を行った。なお、初期値は down resting position : $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ とする。また、実験機の性能を考慮し、 v_{in} は $\pm 10[\text{V}]$ で飽和するようにした。

しかし、何度シミュレーションを繰り返しても、リンク2が top position まで振り上がらないという予想外の問題が発生した。これは、劣化したモータを反映したモデルでは、エネルギー不足に陥ることを避けられないためだと考えられる。そこで、「入力電圧を、0~0.3[s]の間は $-7.8[\text{V}]$ 、0.3~0.5[s]の間は $0[\text{V}]$ とすることで助走をつける」という初期ステップを設けることで、エネルギーを稼いでから振り上げ制御へ移行するという方法で、この問題を解決することにした。

初期ステップを与え、スイッチの基準を $J_{int} = 800$ 、重み定数 K_E, K_D, K_P をそれぞれ $K_E = 500, K_D = 0.05, K_P = 30$ とした時のシミュレーション結果を図2~6に示す。

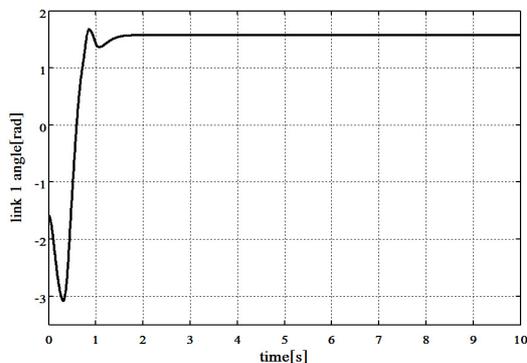


図2 q_1 (リンク1の角度)

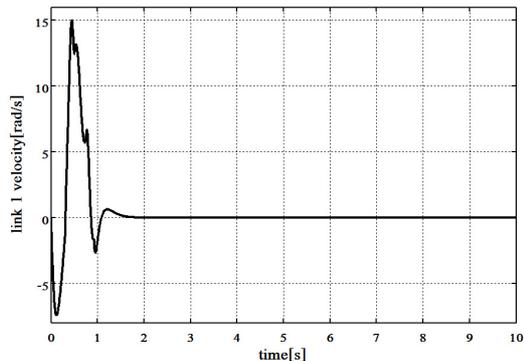


図3 \dot{q}_1 (リンク1の角速度)

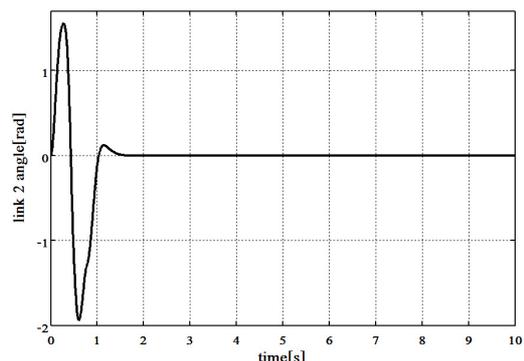


図4 q_2 (リンク2の角度)

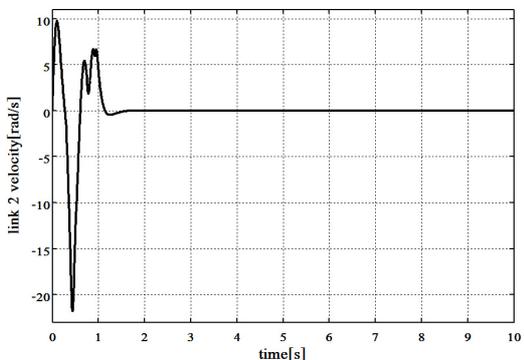


図5 \dot{q}_2 (リンク2の角速度)

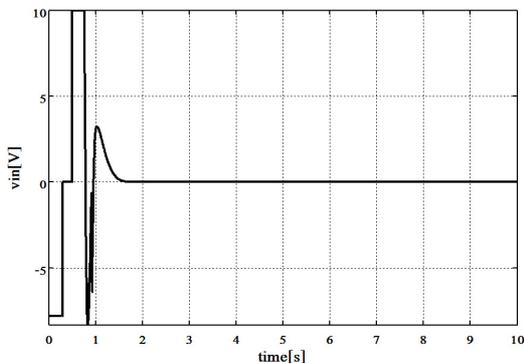


図6 v_{in} (入力電圧)

5 実装

前ページの図 2~6 を見て分かるように、シミュレーション上では、Pendubot を down resting position から top position まで振り上げ、安定化することに成功している。

シミュレーション上で望ましい結果が得られたため、実装を行った。実験機のプログラムを解析し、シミュレーションと同様のアルゴリズムを実験機に実装するプログラムを作成して実験を行った。

実験結果とシミュレーション結果を比較したグラフを図 7~11 に示す。

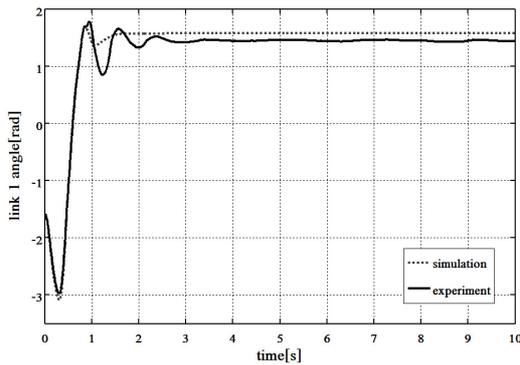


図 7 q_1 (リンク 1 の角度)

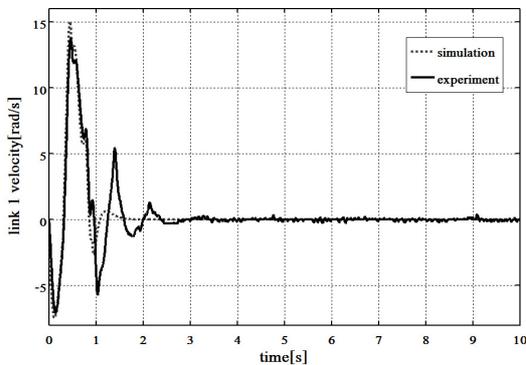


図 8 \dot{q}_1 (リンク 1 の角速度)

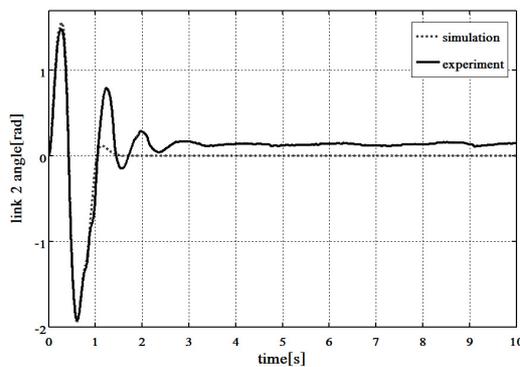


図 9 q_2 (リンク 2 の角度)

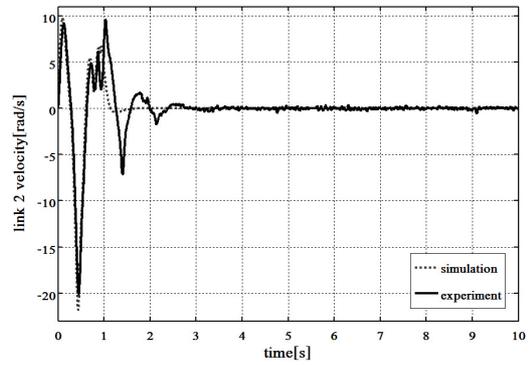


図 10 \dot{q}_2 (リンク 2 の角速度)

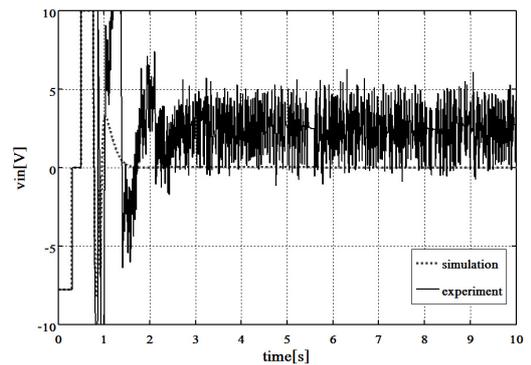


図 11 v_{in} (入力電圧)

6 おわりに

本研究では、適切な同定実験を行うことで現実との一致度の高いモデルを構成し、より現実的なコントローラ的设计を行った。また、2つのコントローラの、より確実な切り替えタイミングについても考察を行った。

図 7~11 から分かるように、設計した制御アルゴリズムによって倒立実験を成功させることができた。

7 参考文献

- [1] Mechatronic Systems : Mechatronics Control Kit Model M-1 User's Manual(2001)
- [2] Isabelle Fantoni, Rogelio Lozano, Mark W. Spong : Energy Based Control of the Pendubot. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.45, No.4, pp.725-729(2000)
- [3] 松浦達郎, 鈴木宏和 : エネルギー制御とスライディングモード制御による倒立振子の振り上げと安定化. 南山大学数理情報学部数理科学科卒業論文 (2005)
- [4] 石川和幾 : エネルギー制御による倒立振子の振り上げ - 摩擦モデルの導入 -. 南山大学数理情報学部数理科学科卒業論文 (2008)
- [5] Daniel Jerome Block : Mechanical Design and Control of the Pendubot. University of Illinois at Urbana - Champaign(1996)