

2次元MPX点上の超補間

2009SE285 飛永 千寿

指導教員：杉浦 洋

1 はじめに

関数近似は数値解析の基礎的で中心的な課題である。ここでは、2次元長方形領域における多項式補間について研究する。Morrow, Patterson, Xuは直積型チェビシエフ測度 μ をもつ長方形領域における近似積分則を提案した。その標本点をMPX点と呼んだ。本論文では彼らの近似法を研究し、それをを用いた長方形領域の数値積分公式を導く。また、数値実験を行い、その特性を調べる。

2 Chebyshev 多項式基底

2.1 1変数 Chebyshev 多項式基底

n 次 Chebyshev 多項式は、

$$T_n(x) = \cos n(\cos^{-1} x) \quad (1)$$

である。これから $\hat{T}_0(x) = 1/\sqrt{2}T_0(x)$, $\hat{T}_n(x) = T_n(x)$ と書き、 \hat{T} を正規化 Chebyshev 多項式という。関数 f, g の内積を

$$(f, g) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x)g(x) d\mu, \quad d\mu = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

と定義すると、

$$(\hat{T}_m, \hat{T}_n) = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} = \delta_{m,n}$$

であり、 $\{\hat{T}_m\}$ は μ -正規直交系となる。

2.2 2変数 Chebyshev 多項式基底

2変数 n 次多項式全体を、

$$\Pi_n^2 = \left\{ \sum_{k=0, l=0}^{k+l \leq n} a_{kl} x^k y^l \mid a_{kl} \in \mathbb{R} \right\}$$

と書く。 $\Omega = [-1, 1]^2$ とし、 $f, g \in C[\Omega]$ の内積を

$$(f, g) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$$

とする。ここで、 $\mathbf{x} = (x, y)$ とし、

$$d\mu(\mathbf{x}) = \frac{4 dx dy}{\pi^2 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}}$$

とする。2次元正規化 Chebyshev 多項式を

$$\hat{T}_{mn}(x, y) = \hat{T}_m(x)\hat{T}_n(y)$$

と定義すると、

$$(\hat{T}_{mn}, \hat{T}_{kl}) = \delta_{mk}\delta_{nl}$$

ということが出来る。すなわち、 $\{\hat{T}_{mn}\}$ は μ -正規直交系である。

3 μ -MPX 則

ここでは Morrow, Patterson, Xu が提案する、2次元正方形領域 $\Omega = [-1, 1]^2$ 上の重み付き積分則 MPX(Morrow-Patterson-Xu) 則を紹介する。 $\Omega = [-1, 1]^2$ 上の連続関数 f の重み付き積分を、

$$Qf = \iint_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mu \quad (2)$$

$$d\mu(\mathbf{x}) = \frac{dx_1 dx_2}{\pi^2 \sqrt{1-x_1^2} \sqrt{1-x_2^2}}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)$$

とする。Xu は式 (2) に対する近似積分則

$$Q_N f = \sum_{i=1}^N \omega_i f(\xi_i) \cong \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mu \quad (3)$$

を提案した。それは、パラメータ n が偶数のときは、標本点数 $N = (n+2)^2/2$, 奇数のときは $N = (n+1)(n+3)/2$ である。Morrow と Patterson が提案した積分則と一致する。ここでは Xu の積分則を MPX 則、または、積分の重み μ にちなんで μ -MPX 則と呼ぶ。

[定理] MPX 則はすべての $p \in \Pi_{2n+1}^2$ を正確に積分する。すなわち、

$$\sum_{\xi \in \Xi} \omega_{\xi} p(\xi) = \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) //$$

4 MPX 超補間

$C(\Omega)$ から $\Pi_n^2(\Omega)$ への μ -直交射影は、

$$S_n f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mu(\mathbf{y}) \quad (4)$$

と書ける。ここで、

$$K_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=0, l=0}^{k+l \leq n} T_{kl}(\mathbf{x}) T_{kl}(\mathbf{y}) \quad (5)$$

は再成核と呼ばれる。この積分を μ -MPX 則で近似すると S_n の近似

$$L_n f = \sum_{i=1}^N \omega_i K_n(\mathbf{x}, \xi_i) f(\xi_i) \cong S_n f \quad (6)$$

が得られる。これを MPX 超補間 (MPX Hyperinterpolation) という。[定理] パラメータ n の MPX 超補間の次数は n である。すなわち任意の $p \in \Pi_n^2$ に対して、 $L_n p = p$ が成立する。//

(証明) (a) μ -MPX 則 Q_n は $2n+1$ 次である。また、再成

核 $K_n(x, y)$ は y について n 次である. ゆえに, $p \in \Pi_n^2$ なら, (b) $K_n(x, y)p(y)$ は y について $2n$ 次である. また, μ -直交射影 S_n の性質より, (c) $S_n p = p$. 以上より,

$$L_n p = Q_n(K_n(x, \cdot)p(\cdot)) \stackrel{(a), (b)}{=} \iint_{\Omega} K_n(x, y)p(y) d\mu(y) = S_n p \stackrel{(c)}{=} p$$

となる. //

5 MPX 超補間のアルゴリズム

MPX 超補間の具体的なアルゴリズムについて述べる. 式 (6) に式 (5) を代入すると

$$L_n f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \omega_i \sum_{\substack{k+l \leq n \\ k \geq 0, l \geq 0}} T_{kl}(\mathbf{x}) T_{kl}(\mathbf{y}) f(\xi_i) \quad (7)$$

となる. 総和の順序を入れ替えて,

$$c_{kl} = \sum_{i=1}^N \omega_i T_{kl}(\mathbf{y}) f(\xi_i) \quad (8)$$

とおくと,

$$L_n f(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{k+l \leq n \\ k \geq 0, l \geq 0}} c_{kl} \hat{T}_{kl}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

となる. c_{kl} はあらかじめ計算しておくことにすると, 式 (7) より大幅に計算量を減らすことができる.

6 数値実験

式 (8), (9) に基づくアルゴリズムを Mathematica 上に実現し, 実験を行った. この実験は FUJITSU のノートパソコン FMV-S8370, CPU は intel Core2 Duo T8100, 2.10GHz である. OS は Windows vista で Mathematica ver8.0.1.0 上でのプログラムを作成した.

直積型 Chebyshev 補間 (C 補間) と MPX 超補間 (超補間) の性能を比較した. C 補間の次数 n は $4 \leq n \leq 15$ で補間多項式の項数は $N = (n+1)^2$, 超補間の次数 n は $5 \leq n \leq 20$ で超補間多項式の項数 $N = (n+1)(n+2)/2$ である. 近似多項式の計算コストは項数 N に比例する.

6.1 ピーク関数の補間

ピーク関数

$$f(x, y) = e^{-a(x^2+y^2)}$$

の補間を行い, 両者の精度を比較した. $a = 1$ のときの結果を図 1 に示す. 横軸は項数 N , 縦軸は最大絶対誤差である. 破線は C 補間, 実線は超補間の結果である. 項数を揃えて比較すると, 超補間は C 補間より精度が良いことがわかる. また, 項数が多くなるにつれてその差は広がる.

6.2 振動関数の補間

振動関数

$$f(x, y) = \sin a(x+y)$$

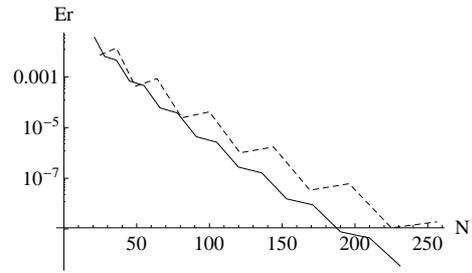


図 1 ピーク関数の補間誤差

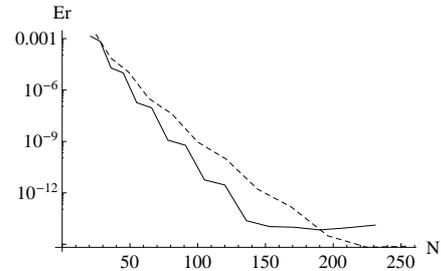


図 2 振動関数の補間誤差

の補間を行い, 両者を比較した. $a = 1$ のときの結果を図 2 に示す. 超補間の方が精度が良いことがわかる. N が大きいとき丸め誤差の影響によりグラフが水平になる. 超補間の方が早く水平になるのは, 超補間が丸め誤差の影響を受けやすいことを示す.

7 おわりに

本研究では, Mathematica を用いて MPX 超補間のアルゴリズムを実現した. 直積型 Chebyshev 補間と精度を比較し, その特徴を調べた. テスト関数としてピーク関数と振動関数を取り上げた. 同じ項数で比較すると, MPX 超補間が優れていた. しかし, 近似関数を構成する時間 (Chebyshev 係数の計算時間) は MPX 超補間の方が圧倒的に長かった. 原因は直積型 Chebyshev 補間が FFT による高速アルゴリズムを使用しているせいである. 今度 MPX 超補間のその面での高速化が望まれる.

8 参考文献

- [1] Marco Caliari, Marco vianello, Stefano De Marchi, Roberto Montagna : Hyper2d:a numerical code for hyperinterpolation on rectangles, Applied Mathematics and Computation, vol. 183, no. 2, pp. 1138-1147(2006).
- [2] 杉浦洋 : 数値計算の基礎と応用 [新訂版], サイエンス社, pp.14-17(2009)