旋回クレーンの吊り荷ロープ長変動に対するロバストLQ制御

2009SE278 田中啓介

指導教員 ： 高見勲

1 はじめに

制御対象である旋回クレーンは吊り荷ロープ長の変動の幅が大きく, それを一定とした制御では制御性能の劣化は免れない [1]. この問題に対して, 本研究ではロープ長変動を考慮した固定ゲインのロバストコントローラを設計する手法を示す. ロバスト性を実現するために, 最適レギュレータ問題を LMI に帰着する [2] ことでポリトープ表現を可能にさせ, ロープ長変動に対してポリトープ表現を用いることでロバスト安定性を保証した制御系の設計を考える.

2 制御対象とモデリング

本研究で用いるクレーンシステムは, トロリーの位置, ワイヤーの長さ, タワーの旋回角度の３つを制御し, ワイヤーで吊るした吊り荷を目標値まで移動させるものである. 本研究ではトロリーの位置は 0.7[m] 固定し, 吊り荷を巻き上げながらタワーの旋回角度を制御することで, 吊り荷を安定に目標地点まで運ぶことを目的とする. また, ロープ長の変動範囲は $0.1 \leq l_p \leq 0.7$ とする. モデリングに用いるパラメータを表 1 に示す.

表 1 物理パラメータ

$\alpha(t)$	タワーの旋回角度（反時計回りを正）[rad]	
$\theta(t)$	吊り荷の振れ角（鉛直方向から時計回りを正）[rad]	
$\phi(t)$	吊り荷の旋回角度（反時計回りを正）[rad]	
$u_t(t)$	タワーモータの入力電流 [A]	
m_p	吊り荷の質量 [kg]	0.147
l_j	滑車の位置 [m]	0.75
J_α	$\alpha(t)$ の慣性モーメント [kg · m^2]	0
J_θ	タワーの慣性モーメント [kg · m^2]	0.8771
$\eta_{g\cdot t}$	タワーモータのギア効率	0.75
$K_{g\cdot t}$	タワーモータのギア比	180:1
$\eta_{m\cdot t}$	タワーモータ効率	1.0
$K_{t\cdot t}$	タワーモータのカレントトルク定数 [N · m/A]	0.065

モデリングにあたり, タワーアームは剛体であり, アームの旋回によって発生する遠心力は吊り荷に対して無視できるものと仮定する. そのため吊り荷はタワーアームに対して鉛直方向にしか振れないものと考える. ラグランジュの運動方程式より導出した微分方程式を $\theta(t) = 0$, $\alpha(t) = 0$ の近傍で線形近似すると式 (1),(2) となる.

$$(J_\theta + m_p l_j^2)\ddot{\theta}(t) + m_p l_p l_j \ddot{\alpha}(t) = K_t u_t(t) \tag{1}$$

$$m_p l_p l_j \ddot{\theta}(t) + m_p l_p^2 \ddot{\alpha}(t) + m_p g l_p \alpha(t) = 0 \tag{2}$$

ただし,

$$K_t = \eta_{g\cdot t} K_{g\cdot t} \eta_{m\cdot t} K_{t\cdot t} \tag{3}$$

とする.

2.1 状態方程式の導出

出力 $y(t)$ を目標値に定常偏差なく追従させるため, 拡大系の導出を行う. 偏差の積分を $\int e_t(t) = r(t) - y(t)$ とし, 状態変数を, $x_{te}(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) & \alpha(t) & \dot{\theta}(t) & \dot{\alpha}(t) & \int e_t(t) \end{bmatrix}^T$ とした拡大系を構成すると次式のようになる.

$$\begin{cases} \dot{x}_{te}(t) = A_{te} x_{te}(t) + B_{te} u_t(t) \\ y_{te}(t) = C_{te} x_{te}(t) \end{cases} \tag{4}$$

$$A_{te} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{m_p g l_j}{J_\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g(m_p {l_j}^2 + J_\theta)}{J_\theta l_p} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{l_p}{l_j} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$B_{te} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{K_t}{J_\theta} & -\frac{K_t l_j}{J_\theta l_p} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{6}$$

$$C_{te} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{l_p}{l_j} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

式 (5) より, $x_{te}(t)$ の係数行列に 2 つの不確かさ $\frac{1}{l_p}, l_p$ が混在するため, ポリトープ表現ができない. そこで, 本研究では等価変換を用いて不確かさを $\frac{1}{l_p}$ のみにする.

2.2 等価変換

式 (4) に対し新たに状態変数を次式により導入する.

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) & \bar{x}_2(t) & \cdots & \bar{x}_n(t) \end{bmatrix}^T \tag{8}$$

$$\bar{x}(t) = T x(t) \tag{9}$$

正則な n 次正方行列 T を,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

とすると, $\bar{A}_{te}, \bar{B}_{te}, \bar{C}_{te}$ はそれぞれ次のようになる.

$$\bar{A}_{te} = T A_{te} T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{m_p g l_j}{J_\theta l_p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g(m_p {l_j}^2 + J_\theta)}{J_\theta l_p} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{l_j} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\bar{B}_{te} = T B_{te} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{K_t}{J_\theta} & -\frac{K_t l_j}{J_\theta} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{12}$$

$$\bar{C}_{te} = C_{te} T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{l_j} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

式 (11),(12),(13) より, 等価変換を行うことで $\bar{A}_{te}$ の値は不確かさ $\frac{1}{l_p}$ にのみ依存する形となり, $\bar{B}_{te}, \bar{C}_{te}$ は不確かさに依存しない形となるためポリトープ表現ができる.

2.3 ポリトープ表現

システムのポリトープ表現を式 (14) に示す.

$$\dot{x} = (\sum_{i=1}^{N} \lambda_i A_i)x + (\sum_{i=1}^{N} \lambda_i B_i)u, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \quad (14)$$

式 (14) に状態フィードバック $u = Kx$ を施し, $X = P^{-1}, Y = KX$ とすると 2 次安定条件は次のようになる.

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (X A^T{}_i + A_i X + Y^T B^T{}_i + B_i Y) < 0, \forall \lambda_i \quad (15)$$

ここで, 不確かさ l_p の端点を $l_{p\cdot min} = 0.1, l_{p\cdot max} = 0.7$ と表す. ロバスト性の保証のためには, 端点である $\frac{1}{l_{p\cdot max}}$ および $\frac{1}{l_{p\cdot min}}$ の場合の行列不等式を満足する共通の解 $P = P^T > 0$ が存在すれば, 端点間でも安定だと言える.

3 制御系設計

3.1 タワーシステムの LMI 定式化

最適レギュレータ問題を LMI に帰着し, ロープ長変動を考慮した固定ゲインのロバストコントローラを設計する. $l_{p\cdot min}$ の時のシステムの係数行列を $(\bar{A}_{te\cdot min}, \bar{B}_{te}, \bar{C}_{te})$, $l_{p\cdot max}$ の時のシステムの係数行列を $(\bar{A}_{te\cdot max}, \bar{B}_{te}, \bar{C}_{te})$ とする. タワーシステムについて LMI 定式化を行うと次のようになる.

$$\begin{bmatrix} He[\bar{A}_{te\cdot min}X + \bar{B}_{te}Y] & X & Y^T \\ X & -\bar{Q}_{min}^{-1} & O \\ Y & O & -\bar{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} He[\bar{A}_{te\cdot max}X + \bar{B}_{te}Y] & X & Y^T \\ X & -\bar{Q}_{max}^{-1} & O \\ Y & O & -\bar{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} Z & I \\ I & X \end{bmatrix} \succ 0 \quad (18)$$

$$\gamma - trace[Z] \succ 0 \quad (19)$$

3.2 フィードバックゲインの導出

式 (16)~(19) を満足する X, Y を用いて, 等価変換後のタワーシステムに対するフィードバックゲイン $\bar{K}$ を $\bar{K} = YX^{-1}$ により求める. 得られたフィードバックゲイン $\bar{K}$ と, 等価変換で用いた変換行列 T を用いて, 等価変換前のタワーシステムに対するフィードバックゲイン K を $K = \bar{K}T$ により求める. ここで, クレーンを旋回させることで発生する吊り荷の運動を考える. 吊り荷の揺れは吊り荷の角振動数に依存する. 角振動数振 ω は,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l_p}} \quad (20)$$

により求められる. これより, ロープ長 l_p が短いほど, 角振動数 ω は大きくなることが分かる. 吊り荷の振れ止めを考えると, 吊り荷ロープ長が最短となる時は角振動数が最も大きくなることから最も振れ止めをしにくく, 最も制御がしにくい状態であると考えられる. そこで, フィードバックゲイン K を求めるために用いる変換行列 T には行列内の l_p の値を 0.1 とした T_{min} を選び, 最も制御しにくい状態での安定性を保証することを考えた. また, 求めたフィードバックゲイン K は次のようになった.

$$\begin{bmatrix} 9.4271 & -9.1954 & 7.6615 & 0.4203 & -5.2807 \end{bmatrix} \quad (21)$$

4 シミュレーション及び実験

ロープ長の変動に対するロバスト性を確認するため, ロープ長を端点である $l_{p\cdot max}$ で固定し, タワーアームを 0[rad] から π[rad] まで旋回させるシミュレーション及び実験を行う.

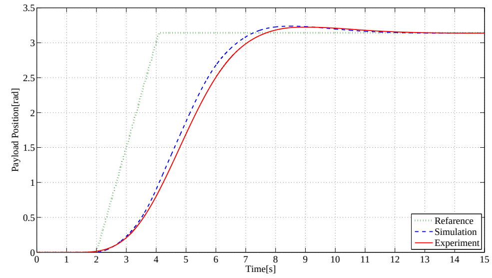

図 1 $l_{p\cdot max}$ での旋回シミュレーション及び実験

次に, l_p を 0.7[m] から 0.1[m] まで 0.15[m/s] の速さで変化させながらタワーアームを 0[rad] から π[rad] まで旋回させるシミュレーション及び実験を行う.

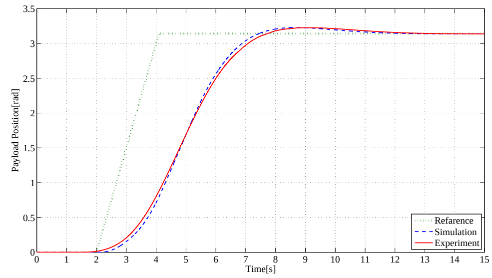

図 2 巻き上げながらの旋回シミュレーション及び実験

図 1, 図 2 から分かるように, シミュレーションと実験では応答がほぼ一致しいることが分かる. これより l_p の変動に対するロバスト安定化を実現できたといえる.

5 おわりに

本研究では, ペイロードシステム, タワーシステムの制御系を最適レギュレータ理論に基づいて設計した. タワーシステムにおいては, 最適レギュレータ問題を LMI に帰着し, 吊り荷ロープ長の変動に対してシステムにポリトープ表現を用いることでロバスト安定性を保証した. 結果として, タワーアームの旋回中に l_p を変動させても安定に制御することができた.

参考文献

[1] 高木, 西村 : タワークレーンの吊り荷ケーブル長変動に対する起伏・旋回方向のゲインスケジュールド分散制御, 日本機械学会論文集 C 編, 69-680, 914/922 (2003)

[2] 川田昌克 : MATLAB/simukink による現代制御入門, 森北出版, 東京 (2011)