H_∞ 制御理論を用いた 3 自由度ヘリコプタのロバスト安定化

2009SE259 杉野拓眞

指導教員：高見勲

1　はじめに

本研究では, 線形化に伴うモデル化誤差, 荷重の変化に対するロバスト性を保証し, 系を安定にする制御則を設計することを目的とする．制御対象には 3 自由度ヘリコプタを用い, フロント, バックロータにそれぞれ荷重をかける．この制御対象は双線形システムであるが, これを線形化する．ディスクリプタ表現と線形分数変換 (LFT) により, 変動パラメータに関し, ポリトープな状態方程式を導く．そして, H_∞ ノルム仕様を満たす LMI で定式化し, 系を安定にする制御則を設計する．

2　制御対象とモデリング

2.1　状態方程式の導出と線形化

本研究で用いる 3 自由度ヘリコプタの簡単な構成図を図 1 に示す．本実験機は, 支持棒 **AB** を, 支点 **O** を中心として水平面内および垂直面内で回転させることができる．点 **O** を基準として, 垂直面内での回転角を $\epsilon(t)$[deg], 水平面内での回転角を $\lambda(t)$[deg] とする．また, 点 **B** を支点として支持棒 **CD** を垂直面内で回転させることができ, このときの回転角を $\rho(t)$[deg] とする．

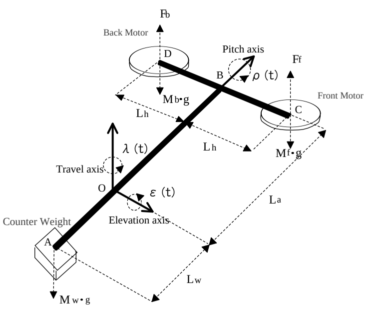

図 1　3 自由度ヘリコプタのモデル

状態変数 $x(t)$ を, $x(t) = [\epsilon(t)\ \rho(t)\ \lambda(t)\ \dot{\epsilon}(t)\ \dot{\rho}(t)\ \dot{\lambda}(t)]^{\mathrm{T}}$, 入力 $u(t)$ を, $u(t) = [u_f(t)\ u_b(t)]^{\mathrm{T}}$ とし, 状態空間表現を式 (1) に示す．ただし, $u_f(t)$[V], $u_b(t)$[V] は, それぞれフロント, バックモータの入力電圧である．

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + L,\ y(t) = Cx(t) \tag{1}$$

また, E, A, B, C, L は, 次のように与えられる．

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_\epsilon & (M_f - M_b)L_aL_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(M_f - M_b)L_aL_h & J_\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_\lambda \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = K_f \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ L_a & L_a \\ L_h & -L_h \\ L_a sin\rho(t) & L_a sin\rho(t) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(M_f + M_b)gL_a + M_wgL_w \\ -(M_f - M_b)gL_h \\ 0 \end{bmatrix}$$

ただし, J_ϵ[kg·m^2], J_ρ[kg·m^2], J_λ[kg·m^2] は, それぞれ各方向に運動する際に生じる慣性モーメントである．

ここで, $\sin\rho(t) \risingdotseq \rho(t)$ として $\ddot{\lambda}(t)$ に注目すると,

$$\ddot{\lambda}(t) = \frac{U(t)}{J_\lambda}\rho(t)\ \ ,\ (U(t) := K_fL_a(u_f(t) + u_b(t))) \tag{2}$$

となる．これは双線形系であるが, 平衡状態 $(U_0, \rho_0 = 0)$ のまわりで線形化すると, E, A, B は次のように書き直され, 系は線形の形で表現できる．

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (M_f + M_b)L_a^2 + M_wL_w^2 & (M_f - M_b)L_aL_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(M_f - M_b)L_aL_h & (M_f + M_b)L_h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{U_0}{J_\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = K_f \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ L_a & L_a \\ L_h & -L_h \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2　ディスクリプタ方程式の導出

E, A には, 不確かさ M_f, M_b が混在しているため, ポリトープ表現ができない．そこで, ディスクリプタシステムと線形分数変換を用いて, これらの不確かさを 1 つの係数行列にまとめる．ディスクリプタ変数を, $\hat{x}(t) = [x(t)\ \ddot{\epsilon}(t)\ \ddot{\rho}(t)\ \ddot{\lambda}(t)\ u(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ とすると, ディスクリプタ方程式は式 (3) になる．

$$\hat{E}\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \tag{3}$$

$\hat{A}$ を式 (4) のように定める． ここで, $\hat{A}_n$ は定数行列, $B_\delta\Delta(I - D_\delta\Delta)^{-1}C_\delta$ は変動パラメータを含む行列である．

$$\hat{A} = \hat{A}_n + B_\delta\Delta(I - D_\delta\Delta)^{-1}C_\delta \tag{4}$$

また, 式 (3) に線形分数変換を施し, 新たなディスクリプタ変数を z_δ とすると次式になる．

$$E_d \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{z_\delta}(t) \end{bmatrix} = A_d \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ z_\delta(t) \end{bmatrix} + B_du(t) \tag{5}$$

ここで, E_d, A_d, B_d は, 次のように与えられる．

$$E_d = \begin{bmatrix} \hat{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_d = \begin{bmatrix} \hat{A}_n & B_\delta\Delta \\ C_\delta & D_\delta\Delta - I \end{bmatrix},\ B_d = \begin{bmatrix} \hat{B} \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.3　拡大系の導出

出力 $y(t)$ を目標値に定常偏差なく追従させるため, 拡大系の導出を行う． 観測出力 $y(t)$ と目標値 $r(t)$ の偏差を $e(t)$ とする． また, 偏差 $e(t)$ を区間 $[0, t]$ まで積分した値を $w(t)$ とする． 拡大系の状態変数を $\tilde{x}(t) = [w_\epsilon(t)\ w_\lambda(t)\ \hat{x}(t)\ z_\delta(t)]^{\mathrm{T}}$ とすると, 拡大系は次式となる．

$$\tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) + B_rr(t) \tag{6}$$

ここで, $\tilde{E}, \tilde{A}, \tilde{B}, B_r$ は, 次のように与えられる．

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & E_d \end{bmatrix},\ \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -C \\ 0 & A_d \end{bmatrix},\ \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_d \end{bmatrix},\ B_r = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

3　制御器設計

3.1　H_∞ 制御系設計

目標値 $r(t)$ から評価出力 $z(t)$ までの H_∞ ノルムを γ_∞ 未満にすることを考える．一般化プラントを次式とする．

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) + B_r r(t) \\ z(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}u(t) \end{cases} \tag{7}$$

W_e, W_x, W_u をそれぞれ偏差の積分, 状態, 入力に対する重みとすると, $\tilde{C}, \tilde{D}$ は次式となる．

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} W_e & 0 & 0 \\ 0 & W_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ W_u \end{bmatrix}$$

$u(t) = K\tilde{x}(t) = YX^{-1}\tilde{x}(t)$ とする．以下の LMI を満たす X, Y が存在すればシステムは安定であり, $\| G(s) \|_\infty < \gamma_\infty$ を保証するフィードバックゲイン K が導出される [1].

$$\begin{bmatrix} X\tilde{A}^{\mathrm{T}} + \tilde{A}X + Y^{\mathrm{T}}\tilde{B}^{\mathrm{T}} + \tilde{B}Y & B_r & X\tilde{C}^{\mathrm{T}} + Y^{\mathrm{T}}\tilde{D}^{\mathrm{T}} \\ B_r^{\mathrm{T}} & -\gamma_\infty^2 I & 0 \\ \tilde{C}X + \tilde{D}Y & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix}, \ X_{11} > 0$$

3.2　ポリトープ型制御系設計

不確かなパラメータの変動範囲内で, ロバスト安定性を保証することを考える．M_f, M_b の変動幅は

$$M_f \in [M_{fmin},\ M_{fmax}] = [0.755,\ 0.830]$$
$$M_b \in [M_{bmin},\ M_{bmax}] = [0.755,\ 0.830]$$

である．変動幅の端点行列 $\tilde{A}_{a\sim d}$ を次のように定める．

$$\tilde{A}_a = \tilde{A}(M_{fmin}, M_{bmin}),\ \ \tilde{A}_b = \tilde{A}(M_{fmin}, M_{bmax})$$
$$\tilde{A}_c = \tilde{A}(M_{fmax}, M_{bmin}),\ \ \tilde{A}_d = \tilde{A}(M_{fmax}, M_{bmax})$$

これらそれぞれで安定であれば, 端点間でも安定である．**3.1** で導出した LMI をポリトープ型に拡張し, 状態フィードバックゲイン K を得る．

4　シミュレーションと実験

制御入力の違いをシミュレーションで比較する．$\epsilon(t)[deg]$, $\lambda(t)[deg]$ の目標値をそれぞれ $15[deg]$,$120[deg]$ とした．ただし, 図 4, 5 は入力電圧のシミュレーションであり, $10[s]$ でスッテプ入力を与えている．

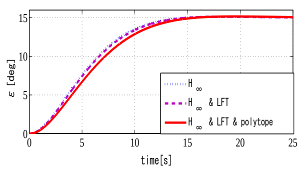

図 2　$\epsilon(t)$[deg]

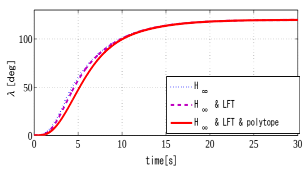

図 3　$\lambda(t)$[deg]

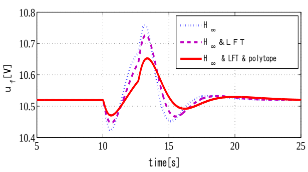

図 4　$u_f(t)$[V]

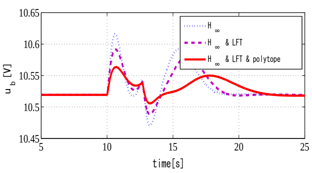

図 5　$u_b(t)$[V]

図 2, 3 より, どの応答もほぼ同時刻に目標値に収束していることがわかる．また, 図 4, 5 より, システムを LFT とディスクリプタ表現で表わし, ポリトープでロバスト安定性を保証したゲインの応答は, 他に比べ最大電圧が低い．よって, パラメータの変動範囲に対して厳密に設計ができたといえる．

また, ロバスト安定性を確認するため, $\tilde{A}_a$, $\tilde{A}_b$, $\tilde{A}_c$, $\tilde{A}_d$ のときの実験結果の比較を図 6, 7 に示す．図 6, 7 において, M_f, M_b が変動してもほぼ同じ実験結果となっている．よって, M_f, M_b の変動範囲に対して, ロバスト安定性を保証していることが確認できた．図 8〜11 は $\tilde{A}_a, \tilde{A}_d$ のときのシミュレーションと実験の比較である．

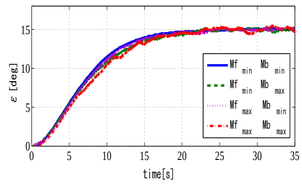

図 6　$\tilde{A}_{a\sim d} : \epsilon(t)[deg]$

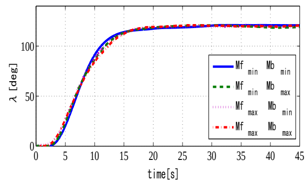

図 7　$\tilde{A}_{a\sim d} : \lambda(t)[deg]$

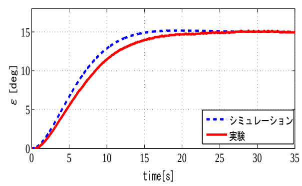

図 8　$\tilde{A}_a : \epsilon(t)[deg]$

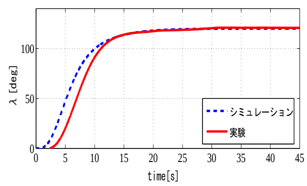

図 9　$\tilde{A}_a : \lambda(t)[deg]$

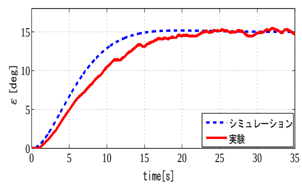

図 10　$\tilde{A}_d : \epsilon(t)[deg]$

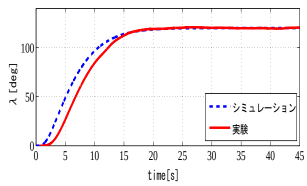

図 11　$\tilde{A}_d : \lambda(t)[deg]$

どの応答も定常偏差はなく, シミュレーションと実験結果はほぼ一致しているといえる．しかし, ϵ(t)[deg] に関して, 実験結果はシミュレーションと比べ, 目標値に収束するまでの時間が長い．

5　おわりに

状態空間表現にいくつかの変動パラメータが含まれる制御対象に対して, LFT, ディスクリプタ表現を用い, ポリトープシステムでロバスト安定性を保証した．また, LFT, ディスクリプタ表現により, パラメータの変動範囲に対して厳密な安定化設計法を示した．しかし, シミュレーションと実験結果を比較すると, 若干の誤差が見られる．これは気流の乱れなどによる外乱の影響だと考えられる．今後の課題として, 外乱を考慮した制御系の設計, また, 制御性能を向上させるために適応制御を用いることを挙げる．

参考文献

[1] 蛯原義雄 :『LMI によるシステム制御』: 森北出版，東京，2012.