

「異常な騎士たちと悪漢たち」のパズル

2009SE218 大羽光

指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

本研究の目的は、いくつかの文献にあるパラドックスを、真理値表による方法で整理し、真理値表および、その良さについての理解を深めることである。具体的には、スマリヤン [1] 第 II 部の前半にある 21 題を対象とし、[1] で与えられている解とは独立に、真理値表を用いた解を与え、そして [1] の解と比較した。

本稿では、第 II 部から『異常な騎士たちと悪漢たち』の 6 番と 7 番の問題、『昼の騎士と夜の騎士』の 6 番、7 番、8 番の問題に対して、真理値表を用いた解を与える。また、[1] の解との比較を行う。

以下では、論理記号として \neg (～でない), \equiv (同値), \Rightarrow (ならば), \wedge (かつ), \vee (または) の 5 つを用いる。また、2 つの真理値「真」「偽」を、それぞれ、 T , F , と表す。

2 異常な騎士たちと悪漢たち

この節では、[1] の『異常な騎士たちと悪漢たち』の 6 番と 7 番 (本稿では問題 1, 問題 2) に対し、真理値表を用いた解を与える。これらの問題は、ある島に関するものであり、その前提条件は以下である。

- この島の住民は、騎士か悪漢のどちらかである。
- 騎士は、本当のことだけを話す。
- 悪漢は、偽りだけを話す。

これらの条件より、この島の住民 A と文 P に対し、

(1) A が P と主張した \Rightarrow 「 A が騎士である $\equiv P$ 」

が成立する。

問題 1: 住民が「僕の父は以前、自分と僕とは違ったタイプだ、と言った」と私に話した。彼の父が本当に、このような発言をしたということは可能か。

真理値表を用いた解

その住民を A とし、 P , Q , R を次のようにおく。

P : A は、騎士である。

Q : A の父は、騎士である。

R : A と A の父は、違うタイプである。

S : A の父が R と言った。

$R = \neg(P \equiv Q)$ である。ここで (1) より、 $Q \equiv R$ が F ならば、 S も F となる。(1) に現れる文の真理値表は表 1 の通りである。一方、(1) より、 $P \equiv S$ となる。表 1 において、1 行目と 2 行目は、この条件を満たさない。残ったのは、3 行目と 4 行目である。つまり、息子は悪漢であり、父は騎士でも悪漢でもどちらでも良いということになる。

問題 2: グレイグは、住民に「君は質問に対してノーと答えることがあるかね」と尋ねた。住民の答えは、イエ

表 1 問題 1 の真理値表

P	Q	R	$Q \equiv R$	S
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
F	T	T	T	?
F	F	F	F	?

スかノーのいずれかであり、グレイグは、住民が騎士か悪漢か知ることができた。住民は騎士か悪漢か。

真理値表を用いた解

その住民を A とし、 P , Q , R を次のようにおく。

P : A は、騎士である。

Q : A は、ノーと答えたことがある。

R : A は、質問に対してイエスと答えた。

(1) に関連する真理値表は表 2 の通りである。一方、 A がイエスと答えたとき、すなわち R のとき、(1) より、 $P \equiv Q$ である。また、 A がノーと答えたとき、すなわち $\neg R$ のとき、(1) より、 $\neg(P \equiv Q)$ である。よって、 $R \Rightarrow (P \equiv Q)$ と $\neg R \Rightarrow \neg(P \equiv Q)$ はどちらも T である。表 2 において、この 2 条件を満たすのは、1 行目、4 行目、6 行目、7 行目のみである。しかし、4 行目は、 Q と R が F 、すなわち、ノーと答えたことがないのに、質問にはノーと答えてしまっているのだから、ありえない。つまり、1 行目、6 行目、7 行目が残る。次に、返答次第で、騎士か悪漢が分かったという条件を考える。イエスと答えたのは、奇数行目で、そのうち条件を満たすのは、1, 7 行目であり、騎士か悪漢かの区別はつかない。一方、ノーと答えたのは偶数行目で、そのうち、条件を満たすのは、6 行目のみである。この場合は、その区別ができる。したがって、住民はノーと答えて、住民は悪漢である。

表 2 問題 2 の真理値表

P	Q	R	$R \Rightarrow (P \equiv Q)$	$\neg R \Rightarrow \neg(P \equiv Q)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

3 昼の騎士と夜の騎士

この節では、[1] の『昼の騎士と夜の騎士』の 6 番、7 番、8 番 (本稿では、問題 3, 問題 4, 問題 5) に対して、

真理値表を用いた解を与える。これらの問題は、ある完全な地下にある都市に関するものであり、その前提条件は以下である。

- この都市の住民は、昼の騎士か夜の騎士のどちらかである。
- 昼の騎士は、昼に本当のことを話し、夜は嘘をつく。
- 夜の騎士は、夜に本当のことを話し、昼は嘘をつく。

これらの条件より、この都市の住民 A とすると、

(2) A が R と主張した \Rightarrow 「「昼の発言である \equiv A が昼の騎士」 \equiv R」

(3) A が R と主張できる \equiv 「「昼の発言である \equiv A が昼の騎士」 \equiv R」

が成立する。

問題 3：住民は私に次のように話した。「昼間は、私は自分が夜の騎士であると主張する。私は実は昼の騎士である。」このとき、住民のタイプと、そのとき昼間か夜間か分かった。この解は何か。

真理値表を用いた解

その住民を A とし、P、Q を次のようにおく。

P：今は、昼である。

Q：A は、昼の騎士である。

まず、(3) より、A の発言の前半の真理値表を考えると、 $(T \equiv Q) \equiv \neg Q$ のとき、昼間「私は夜の騎士である」と主張できる。(3) に関連する真理値表は表 3 の通りである。だから、 $(T \equiv Q) \equiv \neg Q$ は常に F、すなわち、昼間「私が夜の騎士である」と主張できない。よって、A の発言の前半は F である。また、A の発言の後半は Q である。(2) より、 $P \equiv Q$ が F、かつ、 $(P \equiv Q) \equiv Q$ である。一方、真理値表は表 4 の通りである。表 4 において、この条件を満たすのは 2 行目のみである。したがって、今は昼間であって、この住民は夜の騎士である。

表 3 問題 3 前半の真理値表

Q	$T \equiv Q$	$\neg Q$	$(T \equiv Q) \equiv \neg Q$
T	T	F	F
F	F	T	F

表 4 問題 3 後半の真理値表

P	Q(後半の発言)	$P \equiv Q$	前半の発言
T	T	T	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	F

問題 4：ある住民が言った。「私は夜の騎士であって、今は昼である」と。この住民は昼の騎士か、夜の騎士か。また、そのとき昼か夜か。

真理値表を用いた解

その住民を A とし、P、Q を次のようにおく。

P：今は、昼である。

Q：A は、昼の騎士である。

$\neg Q \wedge P$ は、A の主張である。(2) に関連する真理値表は表 5 の通りである。一方、(2) より、 $(P \equiv Q) \equiv (\neg Q \wedge P)$ であり、表 5 において、この条件を満たすのは、3 行目のみである。したがって、住民は昼の騎士で、今は夜である。

表 5 問題 4 の真理値表

P	Q	$P \equiv Q$	$\neg Q$	$\neg Q \wedge P$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	T	F

問題 5：ある住民に「君は昼の騎士か」と「今は昼か」の 2 つの質問をした。住民の返答は「イエス。ただし、これはあなたの問いの少なくとも 1 つに対して、それは正しいと答えたものです。」彼は昼の騎士か夜の騎士か。また、そのとき昼か夜か。

真理値表を用いた解

その住民を A とし、P、Q を次のようにおく。

P：今は、昼である。

Q：A は、昼の騎士である。

$Q \vee P$ は、A の主張である。(2) に関連する真理値表は表 6 の通りである。一方、(2) より、 $(P \equiv Q) \equiv (Q \vee P)$ であり、表 6 において、この条件を満たすのは、1 行目のみである。したがって、住民は昼の騎士であって、今は昼である。

表 6 問題 5 の真理値表

P	Q	$P \equiv Q$	$P \vee Q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	F

4 文献の解答と真理値表の比較

[1] の解答は、文章のみでの説明であり、どうしても長くなってしまふ。だから、読解するのにも時間がかかってしまふし、読み違いを起こしてしまうので、難しい。それに対して、真理値表を用いる場合は、1 つ、2 つの表を見て、部分的にどういう意味であるかを、1 つ 1 つ考えていけば良いので、プロセスみたいになっていて、楽である。さらに長い文章で説明しない分、読み違いを起こす可能性も [1] の解答に比べて、かなり低い。よって、真理値表を用いて解いていく方が、効率が良いのである。

参考文献

- [1] レイモンド・スマリヤン、『数学パズル ものまね鳥をまねる～愉快的パズルと結合子論理の夢の鳥物語～』、森北出版株式会社、東京、1998 年