

双線形システムの吸引領域を考慮する H_2 制御器を用いた ツインロータヘリコプタの目標値追従制御

2009SE196 長屋秋馬

指導教員：高見勲

1 はじめに

本研究で用いる実験機は状態変数が入力的一次式となる双線形システムで表される。双線形システムに対し吸引領域を考慮した状態フィードバック制御則による安定化手法 [1] があり、これを用いてツインロータヘリコプタに対し追従制御系を設計し理論の有効性を検討する。本研究では双線形システムに対し吸引領域を考慮したポリトープで安定を保証する H_2 制御器を設計しシミュレーションと実験を行い安定性を示す。

2 制御対象とモデリング

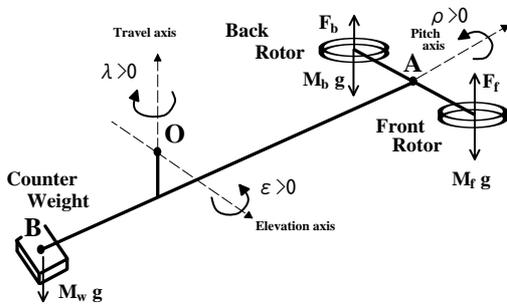


図 1 実験機概略図

実験機概略図を図 1 に示す。実験機にはロータが 2 つ付いており、適切な電圧を与えることで回転し揚力を得ることができる。図のようにトラベル角を λ 、エレベーション角を ϵ 、ピッチ角を ρ とする。それぞれパラメータを K_f :ロータの推進力定数 [N/V], M_h, M_w, M_f, M_b :ヘリコプタボディ全体, カウンターウェイト, 前ロータ, 後ろロータの質量 [kg], L_a, L_w, L_h :OA 間, OB 間, 点 A と各ロータ間の長さ [m], $J_\lambda, J_\epsilon, J_\rho$:各回転方向の慣性モーメント [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$], angle_h :点 A から点 O への仰角 [rad], angle_w :点 O から点 B への仰角 [rad], g :重力加速度 [m/s^2] とする。前後ロータの入力電圧を V_f, V_b とし入力 $u(t) = u^*(t) + u_c = [V_f \ V_b]^T$ とする。ここで u_c は定常状態を維持するために必要な初期電圧である。状態変数を $x_p(t) = [\lambda \ \epsilon \ \rho \ \dot{\lambda} \ \dot{\epsilon} \ \dot{\rho}]^T$ とし, Lagrange の運動方程式より得られた運動方程式を用いて以下の状態方程式を得られた。

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u^*(t) + N_p(\rho) u^*(t) \\ y(t) = C_p x_p(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & \text{O}_{3,3} & I_3 \\ 0 & 0 & -L_a * K_f / J_\lambda \cdot u_c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$B_p = \begin{bmatrix} \text{O}_{4,2} & \\ K_f L_a / J_\epsilon & K_f L_a / J_\rho \\ K_f L_h / J_\rho & -K_f L_h / J_\rho \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$N_p(\rho) = \begin{bmatrix} \text{O}_{3,2} & \\ -(K_f L_a / J_\lambda) \cdot \rho & -(K_f L_a / J_\lambda) \cdot \rho \\ \text{O}_{2,2} & \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$C_p = [I_2 \ \text{O}_{2,4}] \quad (5)$$

3 制御系設計

3.1 拡大系

本研究では出力を目標値に追従させるために λ と ϵ に積分器を付加した。観測出力 $y(t)$ と目標値 $r(t)$ の偏差を $e(t)$ とし, 偏差 $e(t)$ を区間 $[0, t]$ で積分した値を $w(t)$ とする。拡大系の状態変数を $x_e(t) = [x_p^T(t) \ w^T(t)]^T$ とすると拡大系は次式のようになる。

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) = A_e x_e(t) + B_e u^*(t) + N_e(\rho) u^*(t) + B_r r(t) \\ y(t) = C_e x_e(t) \end{cases} \quad (6)$$

$$A_e = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ -C_p & 0 \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$N_e(\rho) = \begin{bmatrix} N_p(\rho) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$C_e = [C_p \ 0] \quad (9)$$

状態フィードバック形式の積分型コントローラ

$$\begin{aligned} u(t) &= K_e x_e(t) \\ &= K x_p(t) + G w(t) \end{aligned} \quad (10)$$

により, 系が安定であることが言えるとき定常偏差なく制御量 $y(t)$ を目標値 $r(t)$ に追従可能であることが知られている [2] .

3.2 吸引領域

リアプノフ関数を時不変な正定対称行列 P を用いて $V(x(t)) = x_e^T(t) P x_e(t)$ と表すとき, 系が漸近安定であるならば常に $V(x(t)) > 0, \dot{V}(x(t)) < 0$ が言える [2] . 初期値の取りうる範囲を式 (11) で表される凸多面体 \mathcal{P} に内包されると仮定し, 式 (12) が成立するとき, 式 (13) で定義される \mathcal{E} に対し $\mathcal{P} \in \mathcal{E}$ が成り立つ [3] . ここで $x_{(i)}$ は \mathcal{P} の頂点であり, $\text{conv}(\cdot)$ は $x_{(i)}$ を頂点とした凸包の操作である。

$$\mathcal{P} = \text{conv}\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(p)}\} \quad (11)$$

$$x_{(i)}^T P x_{(i)} \leq 1, \quad i = 1, \dots, p \quad (12)$$

$$\mathcal{E} = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi^T P \xi \leq 1\} \quad (13)$$

\mathcal{E} の外周は $V(x(t)) = 1$ の等位線であるため, \mathcal{P} に内包される初期値で, 系の漸近安定が保証される時常に $V(x(t)) < 1 (t > 0)$ で $x(t) \rightarrow 0$ に収束することが言える。また, 式 (14) で定義される超平面で囲われた範囲 \mathcal{P}' について, 式 (15) が成立するとき $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'$ が成り立つ [3] .

$$\mathcal{P}' = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid a_k^T \xi \leq 1, \quad k = 1, \dots, q\} \quad (14)$$

$$a_k^T P^{-1} a_k \leq 1, \quad k = 1, \dots, q \quad (15)$$

よって式 (12), 式 (15) が成り立ち, \mathcal{P}' における漸近安定が保証される時, 初期値が \mathcal{P} に内包される系の状態変数は常に \mathcal{P}' に内包されるといえる。本研究における吸引領域を考慮した H_2 制御器はポリトープ表現を用いて $x \in \mathcal{P}'$ における漸近安定を保証する。 $x \in \mathcal{P}'$ における ρ の範囲が式 (16) であるとき, $N_e(\rho)$ が ρ に対し一次であることから式 (17) が言える。

$$\hat{\rho}_{min} \leq \rho \leq \hat{\rho}_{max} \quad (16)$$

$$N_e(\hat{\rho}_{min}) \leq N_e(\rho) \leq N_e(\hat{\rho}_{max}) \quad (17)$$

$N(\hat{\rho}_{min}), N_e(\hat{\rho}_{max})$ の両端点で安定が保証されるとき、それらに内分する $N_e(\hat{\rho})$ に対しても安定が保証される。よって以降は時変ではない ρ を $\hat{\rho}$ と定義し、 $N_e(\hat{\rho})$ について安定を保証する。

3.3 双線形システムに対するポリトープ型 H_2 制御器

以下の LMI 条件式のもと二分探索を用いて γ^2 の最小化を行う。

$$\begin{aligned} \min: & \gamma^2 \\ \text{subject to: } & X \succ 0 \\ & \begin{bmatrix} A_e X + X A_e^T + (B_e + N_e(\hat{\rho}))Y + Y^T(B_e + N_e(\hat{\rho}))^T & C_2 X \\ C_2 X & D_2 Y \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} X C_2^T & Y^T D_2^T \\ -I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0 \\ & (\hat{\rho} = \hat{\rho}_{min}, \hat{\rho}_{max}) \\ & \begin{bmatrix} Z & B_r^T \\ B_r & X \end{bmatrix} \succ 0 \\ & \gamma^2 - \text{trace}(Z) > 0 \\ & \begin{bmatrix} 1 & x^{(i)T} \\ x^{(i)} & X \end{bmatrix} \succeq 0, (i = 1, \dots, 8) \\ & 1 - a_k^T X a_k^T \geq 0, (k = 1, 2) \end{aligned}$$

重みを式 (18), 式 (19) として以上の LMI を解きコントローラを得る。 $K_e = YX^{-1}$ として双線形システムの安定を保証する H_2 制御器を算出すると式 (20) となった。

$$\begin{aligned} C_2 &= (\text{diag}[10 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 100 \ 10] \cdot 10^{-6})^{\frac{1}{2}} \quad (18) \\ D_2 &= (\text{diag}[100 \ 100] \cdot 10^{-6})^{\frac{1}{2}} \quad (19) \\ K_e &= [K \ G] \\ &= \begin{bmatrix} -6.0 & 0.23 & 54.2 & -21.2 & 1.8 \\ 6.0 & 0.23 & -54.2 & 21.2 & 1.8 \\ 49.7 & -70.9 & 0.01 \\ -49.7 & 70.9 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (20) \end{aligned}$$

4 シミュレーション

コリオリの力や遠心力を追加した運動方程式を用いて非線形シミュレーションを行う。初期値 0 , 目標値 $\lambda = -\pi, \epsilon = 0$ とした時の実験結果を図 2, 図 3 に示す。図 2 より、オーバーシュートしているが目標値に収束することができた。図 3 より、少しの上昇はするものの目標値の維持ができていることがわかる。

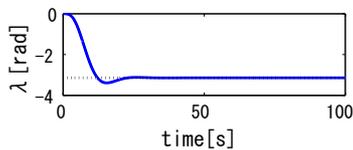


図 2 シミュレーション結果 λ

5 目標値追従実験

定常状態から目標値 $\lambda = -\pi, \epsilon = 0$ を与える実験を行う。結果を図 4, 図 5 に示す。図 4 より、振動的ではあるもののトラベル角に関して目標値に達することができていることがわかる。図 5 より、エレベーション角に関して目標値に達することができていないことがわかる。図 5 より

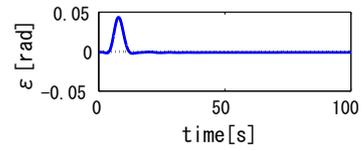


図 3 シミュレーション結果 ϵ

り、ピッチ角は 70s 以降の定常状態において $\rho > 0$ を保っている。エレベーション角、ピッチ角に関しシミュレーションと違う結果を得た理由としてはロータの反動トルクが影響していると考えられる。

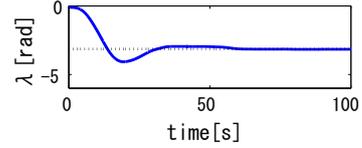


図 4 実験結果 λ

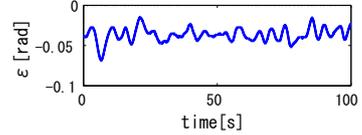


図 5 実験結果 ϵ

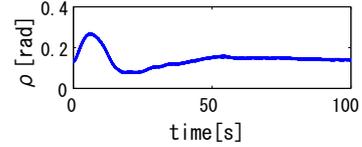


図 6 実験結果 ρ

6 終わりに

本研究では、双線形モデルに対して吸引領域を考慮し取りうるピッチ角に制限をかけ、ポリトープ型で安定を保証する H_2 制御器を設計した。実験より安定はしたもののピッチ角に対し保守性が高く目標値への追従性の低い結果となった。今後の課題として目標値への追従性の向上、保証するピッチ角の範囲の縮小が必要になると考えられる。

参考文献

- [1] Francesco AMato, Carlo Cosentino, Alessio Merola: Stabilization of Bilinear Systems via Linear State Feedback Control 2007.
- [2] 川田昌克: MATLAB/simulink による現代制御入門 森北出版, 東京, 2011.
- [3] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan: Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory pp.68-70, 1994.