2 入力と 3 入力による円軌道上のフォーメーション

2009SE191　長江　麻早 2009SE245 佐々木　健

指導教員：市川　朗

1　はじめに

衛星にはそれぞれの軌道があり, 円軌道上の主衛星とその近傍の従衛星の相対運動の方程式は，時不変非線形微分方程式で与えられる.
原点で線形化した方程式は Hill-Clohessy-Wiltshire 方程式とよばれ，軌道面内の運動は楕円で表される周期解をもち, 軌道面外の運動は単振動の方程式により表される.
今回の研究では, 衛星の軌道制御に関して,Hill-Clohessy-Wiltshire 方程式で求めた周期解に衛星を乗せるという制御を行った.
その際,3 入力と 2 入力で制御し, 2 つの制御でどのくらいの違いが出るのかを比較する.
ここでの評価関数は燃料消費を表わす総速度変化とする.

2　相対運動の方程式

半径 R_0 の円軌道上の主衛星とその近傍の従衛星の相対運動を考えるため, 主衛星の重心を原点とする図 1 の回転座標系 $o-\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ を考える．このとき相対位置ベクトル

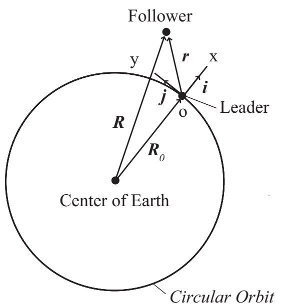

図 1　円軌道上の主衛星

を $r = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とすると, 運動方程式より [1]

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2n\dot{y} + n^2(R_0+x) - \frac{\mu}{R^3}(R_0+x) + u_x\\ \ddot{y} &= -2n\dot{x} + n^2 y - \frac{\mu}{R^3}y + u_y\\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{R^3}z + u_z\end{aligned} \tag{1}$$

が得られる. ここで $[u_x\ u_y\ u_z]^T = \boldsymbol{u}$ は従衛星に働く推力, $R = [(R_0+x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$ である. この方程式を原点 $x = y = z = 0$ で線形化すると

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2 x &= u_x\\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= u_y\\ \ddot{z} + n^2 z &= u_z\end{aligned} \tag{2}$$

が得られる．この方程式は Hill-Clohessy-Wiltshire (HCW) 方程式とよばれる. (2) の状態方程式は

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{3}$$

ここで

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2n & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n^2 & 0 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる.
パラメータ $(a, c, d,\ \alpha\,; b,\ \beta\,)$ を用いると (2) の解は

$$\begin{aligned}x(t) &= 2c + a\cos(nt + a)\\ y(t) &= d - 3nct - 2a\sin(nt +\ \alpha\,)\\ z(t) &= b\cos(nt +\ \beta\,)\end{aligned} \tag{4}$$

と表わすことができる.(3) の解を $\gamma^H = (a, c, d,\ \alpha\,; b,\ \beta\,)$ と表わす．c=0 のときこの解は周期軌道となり,$\gamma^H = (a, d; b)$ と表わす．フィードバック制御によるフォーメーション形成問題とは,(3) の解を与えられた周期軌道 $\gamma_f^H = (a_f, d_f; b_f)$ に漸近的に追従させることである．このときの評価関数は制御に使う推力の絶対積分であり, これは消費燃料に比例する.

3　軌道面内運動

軌道面内運動のシステムは

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n\\ 0 & 0 & -2n & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \tag{5}$$

となる. このシステムの可制御性行列の階数は 4 であり可制御である．u_y のみの 1 入力のとき, 制御行列は $b_y = [0\ 0\ 0\ 1]^T$ となり可制御である．u_x のみの 1 入力のときは,$b_x = [0\ 0\ 1\ 0]^T$ となり可制御性行列の階数は 3 であり不可制御となる．よって 1 入力の面内運動の可制御システムは

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 3n^2 & 0 & 0 & 2n\\ 0 & 0 & -2n & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \tag{6}$$

となる.

4　フォーメーション問題の解

4.1　リッカチ方程式による解

HCW システム (4) に対して目標軌道 $\gamma_f^H = (a_f, d_f; b_f)$ が与えられたとする. このとき軌道上に仮想の衛星をおき, その方程式を

$$\dot{\boldsymbol{x}}_f = A\boldsymbol{x}_f,\ \boldsymbol{x}_f(0) = \boldsymbol{x}_{f0} \tag{7}$$

とおく．このとき軌道の誤差 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_f$ は

$$\dot{\boldsymbol{e}} = A\boldsymbol{e} + B\boldsymbol{u}, \ \boldsymbol{e}(0) = \boldsymbol{e}_0 \tag{8}$$

となる. 目標軌道に追従させるためにはシステム (7) を安定化すればよい. 最適レギュレータのリッカチ方程式

$$A^T X + XA + Q - XBR^{-1}B^T X = 0 \tag{9}$$

より, 安定化フィードバック

$$\boldsymbol{u} = -R^{-1}B^T X\boldsymbol{e} = -K\boldsymbol{e} \tag{10}$$

を求める．リッカチ方程式の解は

$$X = \mathrm{diag}(X_1, X_2) \tag{11}$$

となる. また, この時のフィードバックゲイン K は

$$K = \mathrm{diag}(K_1, K_2) \tag{12}$$

となる．(A, B) が可制御であるので,$(\sqrt{Q}, A)$ が可検出ならば (9) は唯一の半正定解で (10) が安定化フィードバックとなる解をもつ．このフィードバックの性能はその大きさの積分すなわちその L_1-ノルムにより評価する．[2]

4.2　軌道面内運動のシミュレーション

Q と R が相対関係であるので, $Q = 10^{-7}I_6$ で固定し,$R = 10^r I_3$ とし,r を大きくすることで R の値を変化させる．また, その時の初期軌道を a=50 とし, 目標軌道を a=20 とする．そのシミュレーション結果を図 2, 図 3 に示す.

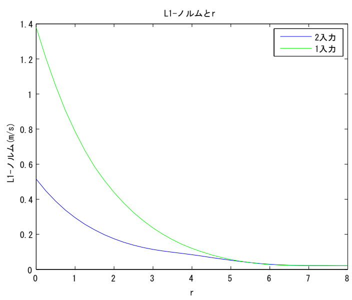

図 2　L_1-ノルムと r

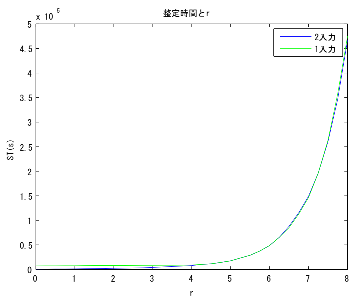

図 3　ST と r

面内運動のシステム (5),(6) を使い,2 入力と 1 入力での違いを調べた. 初期軌道から目標軌道に収束する周期を 3 周期,10 周期で設計をし, その時の L_1-ノルムの変化と軌道の様子をシミュレーションした．さらに, リッカチ方程式の解 X_1 とフィードバックゲイン K_1 の値を求めた．はじめに L_1-ノルムと整定時間のグラフを図 4 に示す.

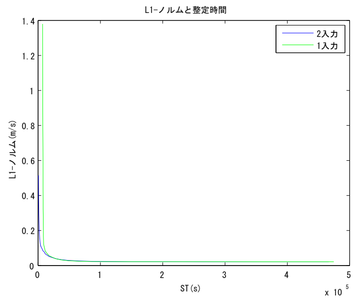

図 4　L_1-ノルムと整定時間

4.3　軌道面外運動

(2) より z は x,y に関わらず, 独立している．よって,2 入力と 3 入力で違いはない. シミュレーション結果は図 5 に示す.

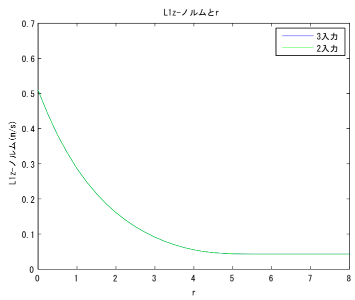

図 5　L_1-ノルムと r

4.4　シミュレーション結果

3 周期,10 周期の時のシミュレーション結果を図 6〜13 に示す．また, その時の X,K の値も示した. この時,r の値は,3 周期の時 $r = 5.25$,10 周期の時 $r = 6.75$ である.

2 入力 3 周期の R と L_1-ノルム (m/s) の値は

$$R = 10^{5.25} I_3 \tag{13}$$

$$L_1 = 4.50 \times 10^{-2} \tag{14}$$

となる．この時の L_1-ノルムのシミュレーション結果を図 6 に示す．r の値を用い, リッカチ方程式を計算した時の解は

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2.00e-3 & -2.48e-4 & 5.98e-1 & 6.88e-1 \\ -2.48e-4 & 1.62e-4 & -1.32e-1 & -1.58e-2 \\ 5.98e-1 & -1.32e-1 & 267 & 148 \\ 6.88e-1 & -1.58e-2 & 148 & 303 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1.68e-4 & 3.63e-2 \\ 3.63e-2 & 114 \end{bmatrix}$$

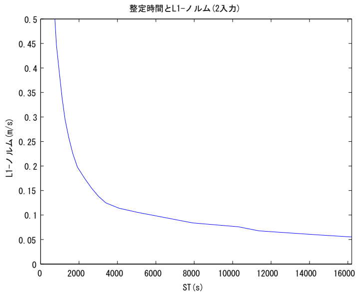

図 6　整定時間 3 周期以内の L_1-ノルム (2 入力)

$$K_1 = \begin{bmatrix} 3.36e-6 & -7.45e-7 & 1.50e-3 & 8.35e-4 \\ 3.87e-6 & -8.88e-8 & 8.35e-4 & 1.70e-3 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 2.04e-7 & 6.39e-4 \end{bmatrix}$$

3 周期のシミュレーション (2 入力) の結果を図 7 に示す.

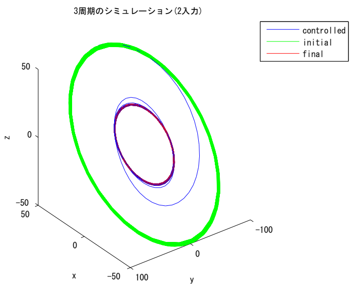

図 7　3 周期のシミュレーション (2 入力)

1 入力 3 周期の R と L_1-ノルム (m/s) の値は

$$R = 10^{5.25} I_3 \tag{15}$$

$$L_1 = 4.66 \times 10^{-2} \tag{16}$$

となる. この時の L_1-ノルムのシミュレーション結果を図 8 に示す. r の値を用い, リッカチ方程式を計算した時の

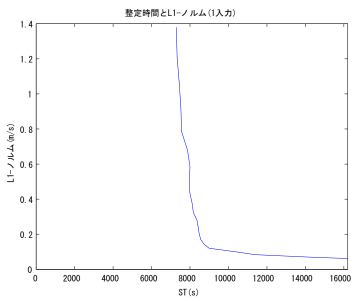

図 8　整定時間 3 周期以内の L_1-ノルム (1 入力)

解は

$$X_1 = \begin{bmatrix} 4.34e-3 & -6.26e-4 & 1.50 & 1.44 \\ -6.26e-4 & 2.25e-4 & -2.82e-1 & -1.33e-1 \\ 1.50 & -2.82e-1 & 627 & 433 \\ 1.44 & -1.33e-1 & 433 & 548 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1.68e-4 & 3.63e-2 \\ 3.63e-2 & 1.14e+2 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 8.08e-6 & -7.50e-7 & 2.43e-3 & 3.08e-3 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 2.04e-7 & 6.39e-4 \end{bmatrix}$$

3 周期のシミュレーション (1 入力) の結果を図 9 に示す.

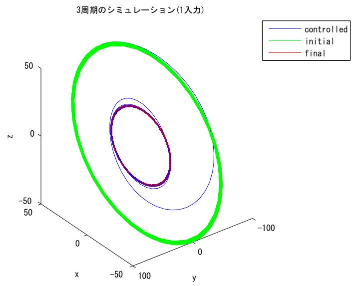

図 9　3 周期のシミュレーション (1 入力)

2 入力 10 周期の R と L_1-ノルム (m/s) の値は

$$R = 10^{6.75} I_3 \tag{17}$$

$$L_1 = 2.24 \times 10^{-2} \tag{18}$$

となる. この時の L_1-ノルムのシミュレーション結果を図 10 に示す. r の値を用い, リッカチ方程式を計算した時の

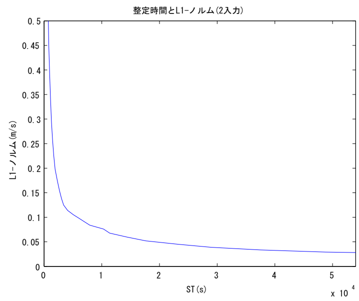

図 10　整定時間 10 周期以内の L_1-ノルム (2 入力)

解は

$$X_1 = \begin{bmatrix} 3.19e-2 & -1.64e-3 & 5.22 & 1.41e+1 \\ -1.64e-3 & 2.82e-4 & -4.90e-1 & -5.67e-1 \\ 5.22 & -4.90e-1 & 1.70e+3 & 2.04e+3 \\ 1.41e+1 & -5.67e-1 & 2.04e+3 & 6.42e+3 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 8.50e-4 & 3.91e-2 \\ 3.91e-2 & 6.63e+2 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 9.29e-7 & -8.72e-8 & 3.03e-4 & 3.62e-4 \\ 2.50e-6 & -1.01e-7 & 3.62e-4 & 1.14e-3 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 6.96e-9 & 1.18e-4 \end{bmatrix}$$

10 周期のシミュレーション (2 入力) の結果を図 11 に示す.

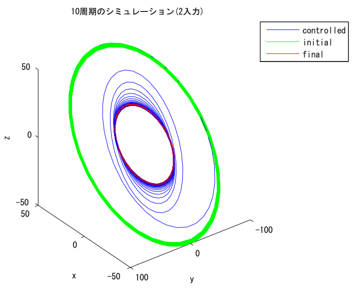

図 11　10 周期のシミュレーション (2 入力)

1 入力 10 周期の R と L_1-ノルム (m/s) の値は

$$R = 10^{6.75} I_3 \tag{19}$$

$$L_1 = 2.25 \times 10^{-2} \tag{20}$$

となる. この時の L_1-ノルムのシミュレーション結果を図 12 に示す.

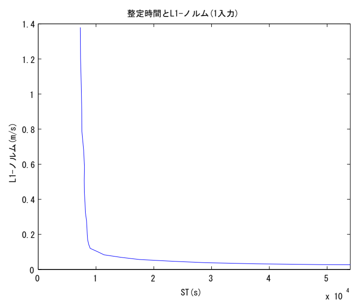

図 12　整定時間 10 周期以内の L_1-ノルム (1 入力)

r の値を用い, リッカチ方程式を計算した時の解は

$$X_1 = \begin{bmatrix} 3.90e-2 & -2.06e-3 & 6.89 & 1.72e+1 \\ -2.06e-3 & 3.11e-4 & -6.01e-1 & -7.50e-1 \\ 6.89 & -6.01e-4 & 2.18 & 2.75 \\ 1.72e+1 & -7.50e-1 & 2.75e+3 & 7.84e+3 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 8.50e-4 & 3.91e-2 \\ 3.91e-2 & 6.63e+2 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 3.06e-6 & -1.33e-7 & 4.90e-4 & 1.39e-3 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 6.96e-9 & 1.18e-4 \end{bmatrix}$$

10 周期のシミュレーション (1 入力) の結果を図 13 に示す.

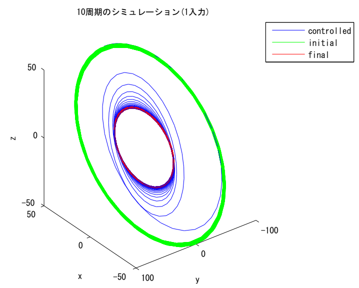

図 13　10 周期のシミュレーション (1 入力)

5　おわりに

本研究では, 円軌道上の主衛星とその近傍の従衛星の相対運動に対して 2 入力と 3 入力でどのくらい違いがあるかを調べた.

2 入力と 3 入力では面内運動に違いが出るため,L_1-ノルムで燃費の良さを見た. リッカチ方程式の状態に関する重み Q は固定し, 入力に関する重み R を上げることで, HCW システムではフィードバックの L_1 ノルムは単調に減少した.

また, 整定時間を指定してシミュレーションを行った結果, ほとんど違いがなく, 燃費もさほど変わらないため,2 入力の制御でも,3 入力の制御と同等の制御ができる.

3 入力の制御よりも 2 入力の制御を用いた方が衛星の構造上楽になる.

例えば, 衛星のエンジンが少なくて済むので, 衛星にかかる負担が減り, コストも少なくなる.

なので, 同等の制御を行えるのならば,2 入力の制御を用いるべきである.

参考文献

[1] A. Ichikawa:Recent Developments in Formation Flying,Lecture Notes ver.1, 2010.

[2] M. Shibata and A. Ichikawa:Orbital Rendezvous and Flyaround Based on Null controllability with Vanishing Energy, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 30, No. 4, pp. 934-945, 2007.