特性変動が生じる3自由度 ヘリコプタのロバスト安定化

2009SE176 森川貴光

指導教員：高見勲

1 はじめに

本研究で使用する 3 自由度 ヘリコプタは非線形性の強いダイナミクスを持つことから線形化誤差が生じる．本研究では, この問題を解決するために近似誤差によって生じる特性変動に対してロバスト安定性を保証できる制御器を設計する．また, 機体に重りを載せることで生じる特性変動に対してもロバスト安定性を保証する．

2 制御対象とモデリング

本研究に用いる 3 自由度 ヘリコプタの簡略化した図を図 1 に示す．3 自由度 ヘリコプタは前後に 2 つのプロペラを持つタンデムローター型のヘリコプタであり, 支持棒を介して土台に固定されている．点 O を中心に垂直方向をエレベーション方向, 水平方向をトラベリング方向とし, 前後のプロペラを操作することでエレベーション方向の運動とトラベリング方向の運動を制御する．エレベーションの角度 $\epsilon(t)$ [rad] とピッチングの角度 $\rho(t)$ [rad] とトラベリングの角度 $\lambda(t)$[rad] を測定し, 前プロペラと後プロペラの電圧 $V_f(t)$[V], $V_b(t)$[V] を操作することで $\epsilon(t)$, $\lambda(t)$ を目標値に追従させる制御系を設計する．

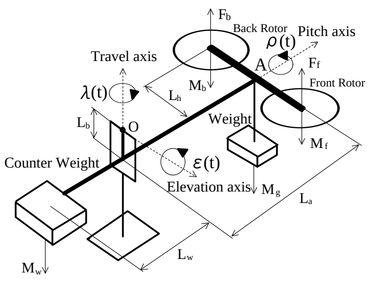

図 1 3DOF ヘリコプタの簡略図

3 自由度 ヘリコプタの非線形運動方程式をラグランジュの運動方程式を用いて導出する． 前後プロペラの質量を M_f,M_b, カウンターウェイトの質量を M_w, 機体重心に吊るす重りの質量を M_g, 土台中心から車体までの距離を L_a, 機体重心からプロペラ中心までの距離を L_h, 土台中心からカウンターウェイト中心までの距離を L_w, 土台から支持棒までの距離を L_b とし, 状態変数 $x(t)$ を $x(t)$=$[\epsilon(t), \rho(t), \lambda(t), \dot{\epsilon}(t), \dot{\rho}(t), \dot{\lambda}(t)]^T$, 入力 $u(t)$ を $u(t)$=$[V_f(t), V_b(t)]^T$ とする．導出した非線形運動方程式を平衡点で線形化すると次の式が得られる．

$$\begin{aligned}\ddot{\epsilon}(t) =& -\frac{(M_f + M_b + M_w + M_g)L_b g}{J_\epsilon}\epsilon(t) \\ &+\frac{(V_f(t)+V_b(t))K_f\sqrt{L_a^2+L_b^2}}{J_\epsilon} \\ &-\frac{(M_f+M_b+M_g)L_a g - M_w L_w g}{J_\epsilon}\end{aligned} \tag{1}$$

$$\ddot{\rho}(t) = \frac{(V_f(t)-V_b(t))K_f L_h}{J_\rho} \tag{2}$$

$$\ddot{\lambda}(t) = -\frac{(V_f(t)+V_b(t))K_f\sqrt{L_a^2+L_b^2}}{J_\lambda}\rho(t) \tag{3}$$

$$J_\epsilon = (M_f+M_b+M_g)(L_a^2+L_b^2) + M_w(L_w^2+L_b^2) \tag{4}$$

$$J_\rho = (M_f+M_b)L_h^2 \tag{5}$$

$$J_\lambda = (M_f+M_b)(L_a^2+L_h^2) + M_w L_w^2 \tag{6}$$

ここで, $V_f(t)+V_b(t)$ の微小変動を $\Delta V_f + \Delta V_b$ [V], 機体を水平に保つ入力を $V_{f0}+V_{b0}$ [V] とすると $V_f(t)+V_b(t)$ は以下のようになる

$$V_f(t)+V_b(t) = V_{f0}+V_{b0}+\Delta V_f+\Delta V_b \tag{7}$$

(3) 式は双線形性があるので平衡点の周りで線形化すると以下となる．

$$\ddot{\lambda}(t) = -\frac{(V_{f0}+V_{b0})K_f\sqrt{L_a^2+L_b^2}}{J_\lambda}\rho(t) \tag{8}$$

(7) 式を考慮し, (1), (2), (8) 式より状態空間表現を (9) 式のように示す．

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t)\\ y(t) = Cx(t)\end{array}\right. \tag{9}$$

また, A, B, C は次のようになる．

$$A = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ a_1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&a_2&0&0&0&0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0&0\\0&0\\0&0\\b_1&b_2\\b_3&b_4\\0&0\end{bmatrix} \tag{10}$$

$$C = \begin{bmatrix} I_3 & \emptyset_{3,3}\end{bmatrix} \tag{11}$$

$$a_1 = -\frac{(M_f+M_b+M_w+M_g)L_b g}{J_\epsilon}$$

$$a_2 = -\frac{(V_{f0}+V_{b0})K_f\sqrt{L_a^2+L_b^2}}{J_\lambda}$$

$$b_1 = b_2 = \frac{K_f\sqrt{L_a^2+L_b^2}}{J_\epsilon}, b_3 = -b_4 = \frac{K_f L_h}{J_\rho}$$

3 制御系設計

3.1 システムの拡大系

本研究では出力を目標値に追従させるために制御ループ内に積分器を付加した. 状態変数の拡大系 $x_e(t)$ を $x_e(t)$=$[\epsilon(t), \rho(t), \lambda(t), \dot{\epsilon}(t), \dot{\rho}(t), \dot{\lambda}(t), \int\epsilon dt, \int\lambda dt]^T$ と

するとシステムの拡大系は次式となる.

$$\dot{x_e}(t) = A_e x_e(t) + B_e u(t) \tag{12}$$

$$A_e = \begin{bmatrix} A & \emptyset_{6,2} \\ -C_e & \emptyset_{2,2} \end{bmatrix}, B_e = \begin{bmatrix} B \\ \emptyset_{2,2} \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$C_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

3.2 行列ポリトープ表現

モデリングの際, (8) 式のように入力 $V_f(t)+V_b(t)$ を機体を水平に保つ入力 $V_{f0}+V_{b0}$ として近似を行った. しかし, 入力は定常値ではなく変動してしまい, $V_f(t)+V_b(t)$ と $V_{f0}+V_{b0}$ に誤差が生じてしまう. そこで今回は, 入力 $V_f(t)+V_b(t)$ と $V_{f0}+V_{b0}$ の誤差により生じる特性変動に対してロバスト安定性を保証する. また, 車体重心に重りを載せた場合に起こる特性変動に対してもロバスト安定性を保証する. 入力 $V_{f0}+V_{b0}$ の変動範囲を 10.4[V]$\leq (V_{f0}+V_{b0}) \leq 44.0$[V] とし, 行列ポリトープ集合 [2] を用いて表すと以下になる.

$$\begin{aligned} V_{f0}+V_{b0} &\in [V_{f0,min}+V_{b0,min}, V_{f0,max}+V_{b0,max}] \\ &= [10.4, 44.0] \end{aligned} \tag{15}$$

また, 重りの質量 M_g の変動範囲を 0[kg]$\leq M_g \leq 0.15$[kg] とすると M_g は以下のように表される.

$$M_g \in [M_{g,min}, M_{g,max}] = [0, 0.15] \tag{16}$$

(15), (16) 式の行列ポリトープ集合を用いてシステム行列 A_e の端点を $A_{e0}, A_{e1}, A_{e2}, A_{e3}$, B_e の端点を $B_{e0}, B_{e1}, B_{e2}, B_{e3}$ とする.

3.3 ロバスト LQ 制御

本研究は, 最適レギュレータ問題 [1] の可解条件を LMI 条件で表現し, 行列ポリトープ表現を用いることでロバスト安定化制御器を設計する. (15) 式で与えられた状態方程式に対し, 評価関数 J を

$$J = \int_0^\infty (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \tag{17}$$

と定義し, 評価関数 J の最小化を行う. 評価関数 J を最小化する LMI 条件は以下のようになる.

$$\begin{bmatrix} He[A_{ek}X + B_{ek}Y] & X & Y^T \\ X & -Q^{-1} & O \\ Y & O & -R^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (k = 0,1,2,3) \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} Z & I \\ I & X \end{bmatrix} \succ 0, \gamma - \mathrm{trace}(Z) > 0 \tag{19}$$

ただし,

$$P = X^{-1} < Z, Y = KX, J < \gamma$$

また, 重み行列 Q, R を以下のように定める.

$$Q = \mathrm{diag}[\ 10 \quad 1 \quad 10 \quad 10 \quad 1 \quad 10 \quad 100 \quad 0.6\ ] \tag{20}$$

$$R = \mathrm{diag}[\ 0.1 \quad 0.1\ ] \tag{21}$$

状態フィードバック形式のコントローラを $u(t) = Kx(t)$ とし, フィードバックゲイン K は $K = YX^{-1}$ とする.

4 シミュレーションと実験

$\epsilon(t) = 15$[deg] かつ $M_g = 0.00$[kg] の場合, $\epsilon(t) = 15$[deg] かつ $M_g = 0.15$[kg] の場合, $\epsilon(t) = -10$[deg] かつ $M_g = 0.00$[kg] の場合, $\epsilon(t) = -10$[deg] かつ $M_g = 0.15$[kg] の場合で, トラベリングを目標値 $\lambda(t) = -120$[deg] に追従させるシミュレーションと実験結果を図 2, 図 3 に, シミュレーションと実験結果の比較を図 4 に示す.

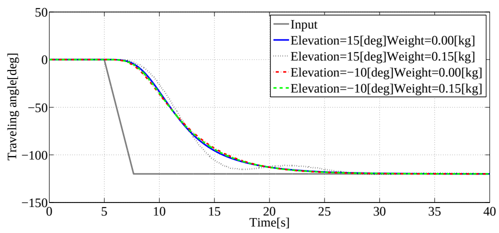

図 2 トラベリングのシミュレーション

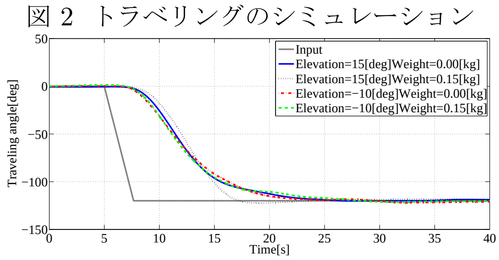

図 3 トラベリングの実験結果

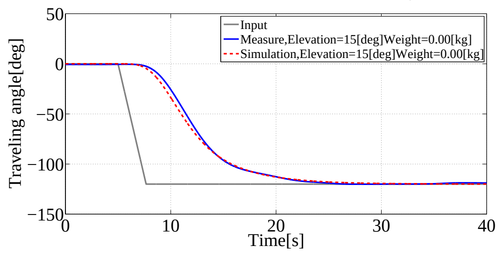

図 4 トラベリングのシミュレーションと実験結果の比較

図 2, 図 3 より, 各場合において安定した応答を示し, 特性変動に対するロバスト安定性を確認することができた. また, 図 4 より, シミュレーションと実験結果も十分一致していることが確認できる.

5 おわりに

行列ポリトープ表現を用いたロバスト LQ で特性変動に対するロバスト安定性を実験で確認することができた. また, シミュレーションと実験結果が十分一致することから信頼できる数学モデルを導出したといえる.

参考文献

[1] 川田昌克：MATLAB/Simulink による現代制御入門 森北出版, 東京, 2011.

[2] 蛯原義雄：LMI によるシステム制御 森北出版, 東京, 2012.